

# Appunti di dinamica dei fluidi e scambio di calore.

Daniele Venturi

Bologna  
10 ottobre, 2008



# Indice

<b>1</b>	<b>Termodinamica dei sistemi chiusi</b>	<b>9</b>
1.1	Sistemi termodinamici . . . . .	9
1.1.1	Lo stato di un sistema e le sue trasformazioni . . . . .	9
1.1.2	Primo principio della termodinamica . . . . .	10
1.1.3	Secondo principio della termodinamica . . . . .	12
1.1.4	Il ciclo di Carnot . . . . .	12
1.1.5	La temperatura termodinamica . . . . .	14
1.2	L'entropia termodinamica . . . . .	16
1.2.1	Definizione macroscopica di entropia . . . . .	17
1.2.2	Lavoro massimo e funzione di disponibilità . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Equazioni della dinamica dei fluidi e dello scambio di calore</b>	<b>19</b>
2.1	Il teorema del trasporto . . . . .	19
2.1.1	Equazione di continuità . . . . .	20
2.1.2	Lemma di conservazione dell'impulso . . . . .	20
2.2	Equazioni della dinamica dei fluidi . . . . .	20
2.2.1	Conservazione dell'impulso . . . . .	20
2.2.2	Conservazione del momento dell'impulso . . . . .	21
2.2.3	Principio di dissipazione dell'energia meccanica . . . . .	23
2.3	Termodinamica dei fluidi . . . . .	25
2.3.1	Termodinamica di un elemento fluido e forma intrinseca del primo principio . . . . .	25
2.3.2	Principio di conservazione dell'energia totale . . . . .	26
2.3.3	Evoluzione del campo di energia interna e di entalpia . . . . .	26
2.3.4	Equazione di Fourier . . . . .	27
2.4	Equazione di bilancio dell'entropia e secondo principio della termodinamica per sistemi continui . . . . .	29
2.5	Relazioni costitutive . . . . .	31
2.5.1	Fluidi Stokesiani . . . . .	32
2.5.2	Fluidi Newtoniani . . . . .	33
2.5.3	Altre tipologie di fluidi . . . . .	36
2.6	Le equazioni di Navier-Stokes . . . . .	36
2.6.1	L'ipotesi di Stokes . . . . .	36
2.6.2	Equazioni di Navier-Stokes . . . . .	37
2.6.3	Adimensionalizzazione delle equazioni . . . . .	41
2.6.4	Equazione di Fourier per un fluido Newtoniano conduttivo ed incompressibile . . . . .	42

2.6.5	Il secondo principio della termodinamica per un fluido Newtoniano . . . . .	43
2.7	Equazioni integrali . . . . .	43
2.7.1	Conservazione della massa . . . . .	43
2.7.2	Conservazione dell'energia totale . . . . .	44
2.7.3	Principio di conservazione dell'energia meccanica . . . . .	47
2.7.4	Conservazione dell'entropia . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Convezione forzata interna</b>	<b>49</b>
3.1	Soluzioni analitiche . . . . .	49
3.1.1	Convezione forzata laminare fra piani isotermi in moto relativo . . . . .	49
3.1.2	Moto laminare isoterma di fluido Newtoniano incomprimibile fra due piani paralleli . . . . .	51
3.1.3	Moto laminare isoterma di fluido Newtoniano incomprimibile fra due cilindri coassiali infiniti . . . . .	53
3.1.4	Moto laminare di fluido Newtoniano incomprimibile in un tubo cilindrico . . . . .	55
3.1.5	Regione di ingresso idrodinamica e termica . . . . .	59
3.2	Scambio termico in metalli liquidi . . . . .	60
3.3	Fattore d'attrito e caduta di pressione per flussi viscosi e stazionari all'interno di tubi di sezione arbitraria . . . . .	61
3.3.1	Flussi laminari . . . . .	61
3.3.2	Flussi turbolenti . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Convezione forzata esterna</b>	<b>67</b>
4.0.3	Soluzione di von Kármán per lo strato limite laminare . . . . .	68
4.0.4	Strato limite turbolento . . . . .	70
4.1	Strato limite termico per flussi laminari su lastra piana . . . . .	71
4.1.1	Metalli liquidi . . . . .	72
4.1.2	Fluidi ordinari in presenza di contemporaneo sviluppo dello strato termico e dinamico . . . . .	72
4.1.3	Strato limite termico turbolento . . . . .	73
4.2	Flusso intorno ad un cilindro . . . . .	73
4.3	Flusso intorno ad una sfera . . . . .	74
4.4	Trasformazioni conformi . . . . .	74
4.4.1	Moti irrotazionali ed isocori . . . . .	74
4.4.2	Moti piani irrotazionali ed isocori . . . . .	75
4.5	Alcuni esempi di trasformazioni conformi del piano . . . . .	76
4.5.1	Corrente uniforme indisturbata . . . . .	76
4.5.2	Corrente che investe un cilindro di raggio $R$ . . . . .	76
4.5.3	Vortice elementare e campo di moto intorno ad un cilindro rotante . . . . .	76
4.5.4	Profili alari di Joukowsky . . . . .	77
4.5.5	Corrente che investe una sfera di raggio $R$ . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Convezione naturale</b>	<b>78</b>
5.1	L' approssimazione di Boussinesq . . . . .	78
5.1.1	Equazioni di Boussinesq in coordinate cartesiane ortogonali . . . . .	79
5.1.2	Equazioni di Boussinesq in coordinate cilindriche . . . . .	80
5.2	Convezione naturale fra piani paralleli . . . . .	81

5.2.1	Determinazione della transizione conduzione/convezione . . . . .	82
5.3	Convezione naturale in cavità rettangolare . . . . .	83
5.4	Convezione naturale su lastra piana verticale . . . . .	83
5.4.1	Nusselt locale e Nusselt medio . . . . .	85
5.5	Convezione naturale su lastra piana orizzontale . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Conduzione di calore</b> . . . . .	<b>86</b>
6.1	Conduzione Fourieriana . . . . .	86
6.1.1	Implicazioni del secondo principio della termodinamica per i fenomeni di conduzione Fourieriana . . . . .	88
6.1.2	Misura della conduttività e della diffusività termica . . . . .	89
6.1.3	Equazione dello scambio termico per solidi indeformabili ed a riposo relativamente al sistema di coordinate . . . . .	90
6.1.4	Adimensionalizzazione dell'equazione della conduzione per solidi indeformabili a riposo rispetto al sistema di coordinate . . . . .	91
6.1.5	Conduzione non stazionaria in coordinate cartesiane, cilindriche e sferiche . . . . .	92
6.1.6	Condizioni al contorno per l'equazione del calore . . . . .	92
6.2	Metodi matematici per la soluzione dell'equazione del calore . . . . .	94
6.2.1	Separazione delle variabili . . . . .	94
6.2.2	Metodo che impegna il teorema di Duhamel per trattare condizioni al contorno dipendenti dal tempo . . . . .	102
6.2.3	Metodo della trasformata di Laplace . . . . .	104
6.2.4	Metodo della trasformata integrale . . . . .	104
6.3	Metodo a parametri concentrati . . . . .	107
6.3.1	Diagrammi per lo studio dei transienti di temperatura . . . . .	109
6.3.2	Conduzione stazionaria bidimensionale utilizzando il fattore di forma di conduzione . . . . .	109
6.4	Conduzione secondo Cattaneo-Vernotte . . . . .	110
6.4.1	Legge costitutiva di Cattaneo . . . . .	111
6.4.2	Implicazioni del secondo principio della termodinamica per i fenomeni di conduzione termica secondo Cattaneo . . . . .	113
6.5	Problemi di conduzione termica inversa . . . . .	114
6.5.1	Metodi di soluzione . . . . .	115
6.6	Cenni di conduzione termica stocastica . . . . .	115
<b>7</b>	<b>Scambiatori di Calore</b> . . . . .	<b>116</b>
7.1	Classificazione degli scambiatori di calore . . . . .	116
7.1.1	Classificazione basata sul meccanismo di scambio . . . . .	116
7.1.2	Classificazione basata sulla compattezza . . . . .	117
7.1.3	Classificazione basata sulle caratteristiche costruttive . . . . .	117
7.1.4	Classificazione basata sulla modalità fisiche di scambio termico . . . . .	118
7.1.5	Classificazione basata sulla geometria del flusso . . . . .	118
7.2	Distribuzione di temperatura negli scambiatori di calore . . . . .	119
7.3	Analisi degli scambiatori di calore con il metodo della temperatura media logaritmica . . . . .	120
7.3.1	Scambiatori monofase a passaggio singolo in geometria di flusso equicorrente o controcorrente . . . . .	120

7.3.2	Scambiatori multipassaggio ed a correnti incrociate . . . . .	123
7.4	Analisi degli scambiatori di calore con il metodo dell'efficienza $\varepsilon - NTU$ (Kays & London) . . . . .	123
7.4.1	Determinazione del legame $\varepsilon$ -NTU per scambiatori monofase equi- corrente ad un solo passaggio . . . . .	125
7.4.2	Determinazione del legame $\varepsilon - NTU$ per scambiatori monofase in controcorrente ad un solo passaggio . . . . .	127
7.4.3	Relazioni inverse . . . . .	128
7.4.4	Scambiatori bifase in cui uno dei due fluidi vaporizza o condensa . .	129
7.4.5	Analisi e progetto dello scambiatore utilizzando $\varepsilon - NTU$ . . . . .	129
7.4.6	Osservazioni . . . . .	129
7.5	Generalità sulle superfici alettate . . . . .	130
7.5.1	Teoria dell'aletta piana sottile . . . . .	130
<b>8</b>	<b>Condizionamento dell'aria</b> . . . . .	<b>133</b>
8.1	Termodinamica delle miscele di aria ed acqua . . . . .	133
8.1.1	Coordinate termodinamiche della miscela di aria-acqua: titolo e grado igrometrico . . . . .	136
8.1.2	Coordinate termodinamiche della miscela aria-vapore in assenza di liquido: titolo, grado igrometrico, grado di saturazione ed entalpia specifico . . . . .	137
8.1.3	Diagramma di Mollier . . . . .	138
8.1.4	Trasformazioni di umidificazione e deumidificazione . . . . .	140
8.1.5	Miscelazione adiabatica di due correnti di aria umida . . . . .	144
8.1.6	Diagramma di psicrometrico . . . . .	145
8.2	Impianti di condizionamento . . . . .	146
8.2.1	Unità di trattamento aria (U.T.A) . . . . .	146
8.2.2	Condizionamento estivo . . . . .	147
8.2.3	Condizionamento invernale . . . . .	149
8.2.4	Calcolo del carico termico . . . . .	150
8.3	Benessere termoigrometrico . . . . .	150
8.3.1	Metodo della temperatura efficace standard (ASHRAE) . . . . .	151
8.3.2	Metodo di Fanger . . . . .	152
8.3.3	Il benessere secondo ISO 7730/84 . . . . .	152
<b>9</b>	<b>Misure meccaniche e termiche</b> . . . . .	<b>154</b>
9.1	Misure di temperatura . . . . .	154
9.1.1	Generalità sulla termometria . . . . .	154
9.1.2	Termometri a gas . . . . .	155
9.1.3	Scala internazionale pratica di temperatura (SIPT) . . . . .	157
9.1.4	Termometri a dilatazione . . . . .	158
9.1.5	Termometri a lamina bimetallica . . . . .	158
9.1.6	Termocoppie . . . . .	159
9.1.7	Termoresistenze . . . . .	164
9.1.8	Termistori . . . . .	165
9.1.9	Influenza dell'irraggiamento termico nelle misure di temperatura . .	165
9.1.10	Generatori e refrigeratori termoelettrici . . . . .	166
9.2	Misure di velocità nei fluidi . . . . .	166

9.2.1	Tubo di Pitot . . . . .	166
9.2.2	Mulinello ed anemometro . . . . .	168
9.2.3	Anemometro a filo caldo . . . . .	168
9.2.4	Laser Doppler . . . . .	168
9.2.5	Particle image velocimetry (PIV) . . . . .	168
9.3	Misure di portata . . . . .	169
9.3.1	Misure di portata con dispositivi a strozzamento: diaframmi, boc- cagli e venturimetri . . . . .	169
<b>10</b>	<b>Gasdinamica</b>	<b>173</b>
10.1	Equazioni fondamentali . . . . .	173
10.1.1	Grandezze di ristagno . . . . .	173
10.2	Rapporti di pressione, temperatura e densità che corrispondono ad una condizione di moto sonico . . . . .	175
10.3	Portata ridotta in funzione del rapporto di pressione o del numero di Mach	176
10.4	Andamento delle sezioni in funzione di $M_a$ e $p/p_t$ . . . . .	177
10.5	Variazione delle coordinate termodinamiche nella direzione del moto del fluido	178
<b>11</b>	<b>Termodinamica dei gas reali</b>	<b>179</b>
11.1	Equazione di Van der Waals . . . . .	179
11.1.1	Primo criterio per la scelta delle costanti . . . . .	180
11.1.2	Secondo criterio per la scelta delle costanti . . . . .	180
11.1.3	Costruzione delle curve limite secondo il criterio di Maxwell . . . . .	181
11.2	Legge degli stati corrispondenti . . . . .	182
11.3	Entalpia ed energia interna di un gas reale . . . . .	183
11.4	Entropia . . . . .	184
11.5	Equazione viriale . . . . .	185
<b>12</b>	<b>Impianti frigoriferi</b>	<b>186</b>
12.1	Fluidi frigoriferi . . . . .	186
12.1.1	Denominazione standard (ASHRAE-1992) dei fluidi frigoriferi . . . . .	187
12.2	Impianti monostadio a compressione secca . . . . .	188
12.3	Impianti multistadio a compressione secca . . . . .	189
12.3.1	Rimozione del “flash gas” . . . . .	190
12.3.2	Compressione interrefrigerata . . . . .	191
12.3.3	Schema di impianto frigorifero a doppio stadio di compressione . . . . .	191
12.4	Impianti frigoriferi a gas . . . . .	192
12.5	Impianti frigoriferi ad assorbimento a singolo effetto . . . . .	193
12.6	Pompe di Calore . . . . .	195
12.6.1	Pompe di calore reversibili . . . . .	195
<b>13</b>	<b>Cicli termodinamici</b>	<b>197</b>
13.1	Cicli termodinamici dei motori alternativi . . . . .	197
13.1.1	Cicli teorici e cicli reali . . . . .	197
13.1.2	Ciclo Otto-Beau de Rochas teorico . . . . .	198
13.1.3	Ciclo Diesel teorico . . . . .	199
13.1.4	Ciclo Sabathé teorico . . . . .	200
13.1.5	Confronto fra i tre cicli teorici . . . . .	202

13.1.6	Pressione media teorica e pressione media indicata . . . . .	203
13.1.7	Differenze fra il cicli teorici ed i cicli indicati . . . . .	203
13.2	Cicli a vapore . . . . .	204
13.2.1	Influenza della pressione di vaporizzazione e di condensazione sul lavoro utile e sul coefficiente economico . . . . .	206
13.2.2	Coefficiente economico del ciclo di Hirn . . . . .	207
13.2.3	Possibili miglioramenti al circuito elementare . . . . .	208
13.3	Cicli a Gas . . . . .	210
13.3.1	Ciclo ideale (Brayton-Joule) . . . . .	211
13.3.2	Ciclo reale . . . . .	213
13.3.3	Miglioramenti del circuito elementare . . . . .	214
13.3.4	Ciclo di Ericsson . . . . .	217
13.4	Cicli combinati gas-vapore . . . . .	218
13.5	Impianti per cogenerazione . . . . .	219
<b>14</b>	<b>Irraggiamento termico</b>	<b>220</b>
14.1	La radiazione del corpo nero . . . . .	221
14.1.1	Intensità spettrale di radiazione: la legge di Planck . . . . .	222
14.1.2	Legge di Stefan-Boltzmann . . . . .	224
14.2	Radiazione emessa da una superficie reale . . . . .	224
14.3	Proprietà radiative delle superfici . . . . .	225
14.3.1	Emissività . . . . .	226
14.3.2	Coefficienti di assorbimento, riflessione e trasmissione . . . . .	227
14.3.3	Legge di Kirchhoff . . . . .	229
14.4	Fattori di vista . . . . .	230
14.4.1	Fattore di vista diffuso fra due superfici elementari . . . . .	230
14.4.2	Fattore di vista diffuso fra due superfici finite . . . . .	231
14.4.3	Proprietà dei fattori di vista . . . . .	232
14.4.4	Metodi per la determinazione dei fattori di vista . . . . .	232
14.5	Trasmissione di calore per irraggiamento fra superfici grigie ed uniforme- mente diffondenti . . . . .	233
14.5.1	Radiosità . . . . .	234
14.5.2	Potenza termica netta trasmessa fra due superfici . . . . .	235
14.6	Irraggiamento termico in presenza gas assorbenti . . . . .	235
14.6.1	Equazione per l'intensità di radiazione in un mezzo assorbente . . . . .	236
14.6.2	Radiazione termica di un gas ad alta temperatura incidente su una superficie piana . . . . .	237
<b>A</b>	<b>Richiami di analisi tensoriale</b>	<b>238</b>
A.1	Componenti fisiche di tensori . . . . .	238
A.2	Divergenza covariante di un vettore e di un tensore doppio . . . . .	239
A.3	Derivate intrinseche e convettive . . . . .	240

# Capitolo 1

## Termodinamica dei sistemi chiusi

La termodinamica si occupa principalmente di trasformazioni di calore in lavoro meccanico e delle trasformazioni inverse di lavoro meccanico in calore. Il principio fondamentale per comprendere l'equivalenza tra calore ed energia va ricercato nell'interpretazione cinetica, che riduce tutti i fenomeni termici a movimenti disordinati di atomi e molecole. Da questo punto di vista lo studio del calore va considerato come la meccanica di un insieme così numeroso di particelle per cui la descrizione di una singola molecola perde di importanza rispetto alle proprietà medie dell'insieme. Questo tipo di meccanica è chiamata *meccanica statistica* ed essa ha portato ad una comprensione soddisfacente delle leggi fondamentali della termodinamica. Il punto di vista della termodinamica pura è però differente. I principi fondamentali sono assunti come *postulati* fondati sull'esperienza, e da essi si traggono conclusioni senza entrare nel meccanismo cinetico dei fenomeni. Questo modo di procedere ha il vantaggio di essere largamente indipendente dalle ipotesi semplificatrici che vengono introdotte quando si utilizza la meccanica statistica. Conseguentemente i risultati termodinamici sono generalmente molto precisi. D'altro canto è piuttosto insoddisfacente ottenere dei risultati senza essere in grado di analizzare nel dettaglio la loro connessione con la dinamica microscopica. Questo punto di vista conduce pertanto ad una termodinamica assiomatica la cui trattazione è una questione molto delicata sia per quanto riguarda la corretta formulazione dei postulati della teoria sia per quanto riguarda la determinazione delle loro conseguenze. In questo capitolo ci occupiamo della termodinamica dei sistemi chiusi. Nel prossimo capitolo sviluppiamo la termodinamica dei sistemi aperti considerando la dinamica di particolari sistemi chiusi infinitesimi, gli *elementi fluidi*, che interagiscono fra loro.

### 1.1 Sistemi termodinamici

#### 1.1.1 Lo stato di un sistema e le sue trasformazioni

In meccanica lo stato di un sistema costituito da  $N$  particelle è completamente definito quando siano note, in un dato istante, la posizione e la velocità (o l'impulso) di ciascuna particella<sup>1</sup>. Nello spazio tridimensionale questo significa avere  $6N$  gradi di libertà. In

---

<sup>1</sup>Per un fluido perfetto vale la stessa cosa cioè lo stato del sistema è univocamente determinato dalla posizione e dalla velocità di ogni elemento fluido, istante per istante. Le coordinate termodinamiche che identificano il macrostato (pressione, densità e temperatura) possono essere determinate in modo univoco, nota la posizione e la velocità degli elementi fluidi (microstato). Al contrario, se specifichiamo la velocità,

termodinamica si introduce un concetto diverso da questo, e molto più semplice. Le quantità trattate in termodinamica sono delle proprietà *medie* del sistema. Conseguentemente una conoscenza dettagliata del moto di ciascuna particella sarebbe superflua. Lo stato dinamico del sistema non risulta affatto noto se si conosce lo stato termodinamico, dato che vi sono infinite configurazioni microscopiche compatibili con un certo valor medio di insieme. In altre parole uno stato termodinamico è una media di insieme di tutti gli stati dinamici attraverso cui passa il sistema in conseguenza dei movimenti molecolari.

Tra gli stati termodinamici di un sistema hanno molta importanza gli stati di *equilibrio* ed, in particolare, gli stati di *equilibrio stabile*. Dati due stati di equilibrio termodinamico è possibile considerare una trasformazione che connette tali stati. Si dice che tale trasformazione è *quasi statica* se durante tutta la trasformazione il sistema passa attraverso stati di equilibrio termodinamico. La trasformazione si dice *reversibile* se esiste un secondo sistema isolato che contiene il sistema e che può essere riportato nello stato iniziale in modo quasi statico e senza effetti esterni.

### 1.1.2 Primo principio della termodinamica

Il primo principio della termodinamica è essenzialmente il principio della conservazione dell'energia per i sistemi termodinamici. In quanto tale, si può enunciarlo dicendo che *la variazione di energia di un sistema durante una qualunque trasformazione uguaglia la quantità di energia scambiata attraverso il contorno del sistema*. Affinché questo enunciato abbia un significato preciso, occorre definire cosa si intende in termodinamica per “energia del sistema” ed “energia scambiata dal sistema attraverso il contorno del sistema”.

Nel caso dei sistemi conservativi puramente meccanici (ad esempio sistemi di particelle, sistemi di corpi rigidi in moto senza attrito, dinamica strutture elastiche non dissipative ecc...), l'energia del sistema  $E$  è pari alla somma dell'energia cinetica  $T$  e dell'energia potenziale  $V$ . Se “ $a$ ” e “ $b$ ” sono due stati successivi di un sistema *isolato* il principio di conservazione dell'energia stabilisce che  $E_a = E_b$ . Per contro, se il sistema interagisce con l'esterno in qualche modo, ad esempio attraverso l'azione di forze, la differenza fra i valori di energia corrispondenti a due stati “ $a$ ” e “ $b$ ” è pari al lavoro compiuto dalle forze esterne durante la trasformazione dallo stato iniziale “ $a$ ” a quello finale “ $b$ ”<sup>2</sup>. In questo caso il principio di conservazione dell'energia stabilisce che

$$E_b - E_a = -L_{a \rightarrow b} \quad (1.2)$$

Supponiamo ora di *non conoscere* le leggi attraverso cui il sistema interagisce con sé stesso e con l'esterno. In questo caso non siamo in grado di calcolare esplicitamente l'energia del sistema quando esso si trova in un certo stato. Possiamo tuttavia utilizzare (1.2) per dare una *definizione empirica* di energia del sistema. A tal fine, scegliamo un arbitrario stato

---

la pressione e la densità del fluido esistono un certo numero di simmetrie che non permettono di individuare univocamente l'identità di un elemento fluido ad un certo istante di tempo. Queste simmetrie hanno come invariante di Nöther la legge di conservazione della vorticità.

<sup>2</sup>Ad esempio l'applicazione di una forza su una trave elastica incastrata ad un estremo ne provoca la flessione ed alla fine del processo la differenza di energia potenziale elastica è pari al lavoro compiuto della forza esterna. Tale lavoro si distribuisce nel volume secondo un processo di deformazione degli elementi elastici secondo la formula

$$L = F \cdot s = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_{ij} T^{ij} dV \quad (1.1)$$

in cui  $\epsilon_{ij}$  è il tensore di deformazione mentre  $T^{ij}$  è il tensore degli sforzi elastici di Hooke.

di riferimento del sistema che indichiamo con “0”, ed in esso poniamo  $E_0 = 0$ . Per definire l’energia del sistema in uno stato “ $b$ ” è sufficiente portarcelo in qualche modo, interagendo con il sistema attraverso il suo contorno. Se  $L_b$  è il lavoro scambiato dal sistema con il contorno in un processo “0”  $\rightarrow$  “ $b$ ”, l’energia del sistema sarà, per definizione

$$E_b := -L_{0 \rightarrow b} \quad (1.3)$$

Ovviamente, affinché questa definizione di energia abbia senso, è necessario che il lavoro  $L_{0 \rightarrow b}$  dipenda solo dagli stati “0” e “ $b$ ” e non dal particolare processo che ha portato “0” in “ $b$ ”. L’esperienza mostra che ciò si verifica in sistemi termodinamici termicamente isolati<sup>3</sup>. Se l’ipotesi di equivalenza fra lavoro ed energia venisse contraddetta dall’esperienza, questo vorrebbe dire che nel sistema l’energia non è conservata oppure che si deve ammettere l’esistenza di altri modi oltre al lavoro meccanico per mezzo dei quali il sistema è in grado di scambiare energia attraverso il suo contorno. L’esperienza di Joule del 1850 in effetti dimostra che gli effetti della rotazione di un mulinello sullo stato di un sistema dissipativo sono *equivalenti* ad un riscaldamento, cioè ad un flusso di calore attraverso il contorno del sistema. Siamo così indotti a ritenere che il *calore* ed il *lavoro* siano delle forme equivalenti di energia. In un sistema termicamente isolato la conservazione dell’energia stabilisce che  $\Delta E_{a \rightarrow b} + L_{a \rightarrow b} = 0$ . Se il sistema non è termicamente isolato avremo  $\Delta E_{a \rightarrow b} + L_{a \rightarrow b} \neq 0$ . La differenza fra l’energia del sistema in due stati “ $a$ ” e “ $b$ ” connessi da un qualunque processo energetico  $a \rightarrow b$  ed il lavoro scambiato dal sistema durante tale processo si definisce *calore*

$$Q_{a \rightarrow b} := L_{a \rightarrow b} + \Delta E_{a \rightarrow b} \quad (1.4)$$

Fisicamente possiamo interpretare  $Q_{a \rightarrow b}$  come quella quantità di energia che il sistema ha ricevuto non sotto forma di lavoro. Ciò è una conseguenza immediata del fatto che la variazione di energia del sistema deve eguagliare l’energia totale scambiata attraverso il contorno del sistema. Per una qualunque trasformazione ciclica  $\Delta E_{a \rightarrow b} = 0$ , dunque

$$Q_{a \rightarrow a} = L_{a \rightarrow a} \quad (1.5)$$

Se un sistema termodinamico viola questo principio si dice che esso realizza un *moto perpetuo di prima specie*. In particolare un ciclo termodinamico compiuto da un sistema adiabatico deve essere necessariamente di lavoro nullo. In questo caso se  $b_i$  sono stati intermedi del processo  $a \rightarrow a$ , otteniamo la condizione

$$L_{a \rightarrow a} = L_{a \rightarrow b_1} + \sum_{i=1}^{N-1} L_{b_i \rightarrow b_{i+1}} + L_{b_N \rightarrow a} = 0 \quad (1.6)$$

La sequenza processi che connette gli stati  $b_i$  si dice anche poligonale energetica.

---

<sup>3</sup>Un sistema si dice termicamente isolato (o *adiabatico*) se esso non scambia energia termica attraverso il suo contorno. Una trasformazione compiuta da un sistema termicamente isolato si definisce *trasformazione adiabatica*. L’esperienza mostra che vi è una corrispondenza biunivoca fra il lavoro scambiato attraverso il contorno di un sistema termicamente isolato e lo stato del sistema stesso. Il concetto di processo adiabatico dunque assume un’importanza speciale e su esso si fonda gran parte della termodinamica macroscopica. Fu il matematico greco Carathéodory a proporre nel 1909 una definizione di energia di un sistema termodinamico basata sul concetto di processo adiabatico.

### 1.1.3 Secondo principio della termodinamica

Il primo principio della termodinamica stabilisce essenzialmente il principio di conservazione dell'energia per i sistemi termodinamici. Esso non pone alcuna limitazione alla possibilità di trasformare l'energia da una forma all'altra. L'esperienza mostra tuttavia che vi sono delle grosse limitazioni sulla possibilità di trasformare del calore in lavoro. Per enunciare queste limitazioni è opportuno e conveniente definire cosa si intende per *sorgente di calore* ad una certa temperatura. Si dice sorgente di calore alla temperatura  $t$  un corpo che si trovi uniformemente alla temperatura  $t$  e che sia in grado di scambiare calore ma non lavoro con i corpi circostanti. Ad esempio una massa d'acqua che si trovi ad una temperatura uniforme può essere considerata una sorgente di calore dato che il suo volume varia molto poco a seguito di una variazione di temperatura (la comprimibilità isobara è dell'ordine di  $10^{-4} \text{ K}^{-1}$ ). A seguito dello scambio di calore con i corpi circostanti la sorgente di calore potrebbe ridurre la sua temperatura: in altre parole essa potrebbe avere una capacità termica *finita*.

**Postulato di Lord Kelvin** *È impossibile realizzare una trasformazione termodinamica il cui unico risultato sia quello di convertire in lavoro il calore tratto da una sola sorgente di calore<sup>4</sup>.*

I sistemi termodinamici che violano il postulato di Kelvin si dice che realizzano un *moto perpetuo di seconda specie*. Alcuni esempi sono: una nave che realizza un ciclo motore scambiando calore unicamente con il mare oppure un generatore termoelettrico in grado di convertire il calore estratto del terreno senza cedere calore ad una seconda sorgente.

**Postulato di Clausius** *È impossibile realizzare una trasformazione termodinamica il cui unico risultato sia un passaggio di calore da un corpo ad una data temperatura ad uno a temperatura più alta.*

I due postulati sono equivalenti. Infatti se il postulato di Kelvin non fosse vero, potremmo costruire una macchina in grado di prelevare calore da una sorgente a temperatura  $t_1$  convertendolo integralmente in lavoro riportandosi allo stato iniziale. Questo lavoro potrebbe essere dissipato per attrito per riscaldare un corpo che si trova a temperatura  $t_1$ , portandolo ad una temperatura  $t_2 > t_1$ . L'effetto globale sarebbe passaggio di calore da una sorgente a temperatura  $t_1$  ad un corpo a temperatura superiore  $t_2 > t_1$  (violazione del postulato di Clausius). D'altra parte se per assurdo supponiamo che sia possibile che una certa quantità di calore fluisca spontaneamente da un corpo freddo ad uno caldo allora è possibile costruire un macchina motrice che riceve calore da dalla sorgente calda e lo converte integralmente in lavoro. Infatti è sufficiente considerare una macchina che assorbe calore dalla sorgente calda e cede alla fredda esattamente la stessa quantità che fluisce dalla sorgente fredda a quella calda.

### 1.1.4 Il ciclo di Carnot

Per una trasformazione ciclica abbiamo visto che  $L = Q$ . Il secondo principio della termodinamica ci dice che una macchina ciclica deve necessariamente scambiare calore con

---

<sup>4</sup>Una conseguenza immediata di questo enunciato è che due processi adiabatici differenti non possono avere nessuno stato in comune. Se così non fosse potremmo costruire un ciclo termodinamico di lavoro non nullo che scambia calore con una sola sorgente.

almeno due sorgenti di calore. Consideriamo pertanto una macchina operante fra due sorgenti di calore e siano  $Q_1$  e  $Q_2$  i calori scambiati con tali sorgenti ( $Q_1$  con la sorgente calda,  $Q_2$  con quella fredda). Per le macchine motrici si definisce *coefficiente economico* (o *rendimento*) del ciclo la quantità

$$\varepsilon = \frac{L}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (1.7)$$

in cui  $Q_1$  è il calore prelevato dalla sorgente a temperatura maggiore. Il processo termodinamico più efficiente per scambiare calore con una sorgente è il processo *isoterma*, alla temperatura della sorgente stessa<sup>5</sup>. In pratica attraverso le due trasformazioni isoterme massimizziamo  $Q_1$  e minimizziamo  $Q_2$  cioè massimizziamo il coefficiente economico del ciclo. Il ciclo di Carnot si chiude con due trasformazioni adiabatiche e reversibili. La macchina di Carnot è pertanto una macchina reversibile che realizza un ciclo termodinamico composto da due trasformazioni isoentropiche e due trasformazioni isoterme reversibili. È possibile dimostrare che *fra tutte le macchine cicliche che operano fra due sorgenti di calore, la macchina reversibile (quella di Carnot) ha il coefficiente economico massimo*. Questo enunciato è noto come *teorema di Carnot* ed esso equivale ai postulati di Clausius e Kelvin: si tratta cioè di una formulazione alternativa del secondo principio della termodinamica.

**Dimostrazione del teorema di Carnot** Indichiamo con  $Q_1$  e  $Q'_1$  le quantità di calore prelevate in un ciclo dalla macchina di Carnot e da una generica macchina motrice dalla sorgente di calore a temperatura elevata. Analogamente indichiamo con  $Q_2$  e  $Q'_2$  quelle cedute dalle suddette macchine alla sorgente a bassa temperatura. Il lavoro utile prodotto in un ciclo è

$$L = Q_1 - Q_2 \quad (\text{macchina di Carnot}) \quad (1.8)$$

$$L' = Q'_1 - Q'_2 \quad (\text{macchina generica}) \quad (1.9)$$

Supponiamo che il rapporto fra i calori prelevati dalla sorgente calda sia un numero razionale<sup>6</sup>, allora esistono due numeri interi positivi  $N$  ed  $N'$  tali che

$$\frac{Q_1}{Q'_1} = \frac{N}{N'} \quad (1.12)$$

---

<sup>5</sup>Per realizzare tale processo occorre che il sistema si trovi ad una temperatura non esattamente uguale a quella della sorgente bensì ad una temperatura infinitamente vicina, cioè occorre operare fra differenze di temperatura infinitesime (processo quasi statico). Per data variazione di entropia del sistema la massima (o la minima) potenza scambiabile con una sorgente a temperatura  $T$  è  $T\Delta s$ , e questo avviene se il processo di scambio è isoterma.

<sup>6</sup>Nel caso in cui tale rapporto sia *irrazionale* si può dimostrare che fissato un  $\epsilon$  piccolo a piacere non è detto che esistano due interi positivi  $N$  ed  $N'$  tali che

$$|N'Q_1 - NQ'_1| \leq \epsilon \quad (1.10)$$

Infatti se  $N'Q_1 > NQ'_1$  la (1.10) equivale a  $NQ'_1 \leq N'Q_1 \leq NQ'_1 + \epsilon$ , cioè

$$N \frac{Q'_1}{Q_1} \leq N' \leq N \frac{Q'_1}{Q_1} + \frac{\epsilon}{Q_1} \quad (1.11)$$

Ora, se  $Q'_1/Q_1$  è *irrazionale*, per  $\epsilon \rightarrow 0$  la (1.11) richiede l'esistenza di un intero  $N'$  arbitrariamente vicino ad un numero irrazionale, cosa evidentemente falsa.

Consideriamo un  $N'$  cicli inversi della macchina di Carnot (che assorbe pertanto lavoro  $N'L$  e cede calore  $N'Q_1$  alla sorgente calda) ed  $N$  cicli della macchina reale che assorbe  $NQ'_1$  dalla sorgente calda e cede  $NQ'_2$  alla sorgente fredda producendo lavoro  $NL'$ . Il lavoro totale compiuto dalle due macchine nel processo sopra descritto sarà

$$L_{\text{tot}} = NL' - N'L = \underbrace{Q_{1,\text{tot}}}_{=0} - Q_{2,\text{tot}} = -Q_{2,\text{tot}} \quad (1.13)$$

Infatti per la (1.12)

$$Q_{1,\text{tot}} = N'Q_1 - NQ'_1 = 0 \quad (1.14)$$

$$Q_{2,\text{tot}} = NQ'_2 - N'Q_2 \quad (\text{ceduto al serbatoio freddo}) \quad (1.15)$$

Poiché il sistema complessivamente compie una trasformazione ciclica (bisogna far fare  $N'$  cicli alla macchina di Carnot inversa ed  $N$  cicli a quella reale) ed il calore scambiato con una delle due sorgenti è nullo per costruzione, il lavoro  $L_{\text{tot}}$  non può essere positivo per il postulato di Kelvin. Infatti  $-Q_{2,\text{tot}}$  è tratto dal serbatoio freddo. Pertanto dobbiamo avere

$$L_{\text{tot}} = -Q_{2,\text{tot}} \leq 0 \quad (1.16)$$

questo significa che  $NQ'_2 - N'Q_2 \geq 0$  cioè

$$\frac{Q_2}{Q'_2} \leq \frac{N}{N'} = \frac{Q_1}{Q'_1} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} \leq \frac{Q'_2}{Q'_1} \quad (1.17)$$

Questo risultato implica

$$\boxed{\varepsilon \leq \varepsilon_c} \quad (1.18)$$

cioè il coefficiente economico della macchina che opera reversibilmente fra le due sorgenti di calore (la reversibilità riguarda sia gli scambi di calore sia le trasformazioni di compressione ed espansione) è quello massimo. Se entrambi le macchine che operano fra i serbatoi sono reversibili (cioè sono entrambi macchine di Carnot) dal ragionamento appena fatto, applicato alla seconda macchina, deduciamo

$$\frac{Q_2}{Q_1} \geq \frac{Q'_2}{Q'_1} \quad (1.19)$$

Pertanto deve essere

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q'_2}{Q'_1} \Rightarrow \varepsilon_{c_1} = \varepsilon_{c_2} \quad (1.20)$$

cioè tutte le macchine di Carnot che operano fra gli stessi serbatoi hanno lo stesso rendimento. Inoltre *il rapporto fra i calori scambiati è lo stesso per tutti i motori reversibili che lavorano fra le stesse temperature*. Questo risultato ci dice che tale rapporto è *indipendente* dalle particolari proprietà della macchina di Carnot e dipende soltanto dalle due temperature  $t_1$  e  $t_2$ .

### 1.1.5 La temperatura termodinamica

Consideriamo una qualunque macchina reversibile operante fra due sorgenti di calore a temperatura  $t_1$  e  $t_2$  ( $t_1 > t_2$ ). Abbiamo visto che il rapporto fra i calori scambiati è lo

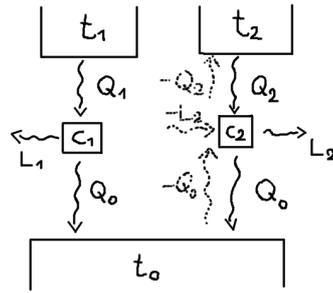


Figura 1.1: Scala termodinamica di temperatura. Invertendo il ciclo della macchina di Carnot  $C_2$  notiamo che la macchina  $C_1 + C_2$  è sempre una macchina di Carnot che scambia con i serbatoi a temperatura  $t_2$  e  $t_1$ .

stesso per tutte le macchine reversibili che operano fra le stesse sorgenti, ed è soltanto funzione delle temperature delle sorgenti stesse. Poniamo pertanto

$$\frac{Q_2}{Q_1} = f(t_1, t_2) \quad (1.21)$$

Ora dimostriamo che la funzione  $f(t_1, t_2)$  ha la seguente proprietà

$$f(t_0, t_2) = f(t_0, t_1) f(t_1, t_2) \quad (1.22)$$

A tal fine consideriamo tre sorgenti di calore a temperatura  $t_0$ ,  $t_1$  e  $t_2$ , e due macchine reversibili operanti fra  $t_0$  e  $t_1$  e fra  $t_0$  e  $t_2$ .

Utilizzando (1.21) è facile provare<sup>7</sup> che

$$\frac{Q_1}{Q_0} = f(t_0, t_1) \quad (1.23)$$

$$\frac{Q_2}{Q_0} = f(t_0, t_2) \quad (1.24)$$

e, facendo il rapporto

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{f(t_0, t_2)}{f(t_0, t_1)} \quad (1.25)$$

Se invertiamo il ciclo della macchina operante fra  $t_2$  e  $t_0$  e lo mettiamo assieme al ciclo della macchina operante fra  $t_1$  e  $t_0$ , nell'ipotesi in cui  $Q_0$  sia lo stesso per entrambi le macchine abbiamo costruito una macchina reversibile che scambia con le sorgenti a temperatura  $t_1$  e  $t_2$ , per la quale vale

$$\frac{Q_2}{Q_1} = f(t_1, t_2) \quad (1.26)$$

Se consideriamo una scelta arbitraria di  $t_0$  notiamo che la funzione  $f(t_0, t)$  assume la forma

$$f(t_0, t) = c\theta(t) \quad (1.27)$$

<sup>7</sup>Chiaramente abbiamo tarato le due macchine in modo tale che il calore  $Q_0$  scambiato la sorgente a temperatura  $t_0$  sia la stessa.

Pertanto dalla (1.25) deduciamo

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\theta(t_2)}{\theta(t_1)} \quad (1.28)$$

In tutto questo discorso abbiamo utilizzato una temperatura empirica “ $t$ ” che abbiamo misurato con un termometro non meglio identificato. Non possiamo pertanto determinare analiticamente la funzione  $\theta(t)$ . Tuttavia, poiché la scala di temperatura è del tutto arbitraria, è possibile utilizzare direttamente  $\theta(t)$  per costruire la scala stessa. In tal modo se misuriamo le quantità di calore scambiate da una macchina di Carnot con due sorgenti possiamo costruire una scala (detta scala *termodinamica*) utilizzando la relazione (1.28). In questo caso la funzione  $\theta(t)$  è determinata a meno di un fattore moltiplicativo arbitrario che può essere eliminato fissando a  $\theta(t) = 273.16$  K la temperatura del punto triplo dell’acqua. Pertanto abbiamo

$$\boxed{T = 273.16 \frac{Q}{Q_t} \text{ [K]}} \quad (1.29)$$

in cui  $Q$  e  $Q_t$  sono rispettivamente i calori scambiati da una qualunque macchina di Carnot con due sorgenti a temperatura  $T$  ed alla temperatura del punto triplo dell’acqua. La scala di temperatura così definita è detta *scala termodinamica assoluta*. Come vedremo nel capitolo §9.1 la scala termodinamica di temperatura, benché sia teoricamente rigorosa, è priva di interesse pratico poiché la macchina reversibile che opera fra le due sorgenti di calore non esiste. Si dimostra facilmente che la temperatura assoluta coincide con la temperatura del gas perfetto<sup>8</sup>. Utilizzando la scala termodinamica di temperatura è facile mostrare che il coefficiente economico di una macchina di Carnot è

$$\varepsilon_c = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (1.30)$$

## 1.2 L’entropia termodinamica

Consideriamo la definizione di entropia<sup>9</sup> in un sistema termodinamico che compie una trasformazione ciclica. Supponiamo che durante la trasformazione il sistema scambi calore con certo numero di sorgenti a temperatura  $T_i$ . Possiamo rappresentare un tratto di trasformazione reale mediante un ciclo a farfalla composto da due adiabatiche reversibili ed una isoterma. In altre parole approssimiamo un tratto della trasformazione reale compiuta dal sistema con una ordinata di compenso, in modo tale che il calore scambiato lungo l’isoterma sia lo stesso di quello scambiato della trasformazione reale. Utilizzando questa approssimazione locale della trasformazione del sistema possiamo costruire una serie di cicli di Carnot, affettando il ciclo reale con una serie di adiabatiche reversibili e tratti di isoterma. In figura 1.2 mostriamo questa costruzione per un ciclo ideale di Brayton-Joule. Utilizzando la definizione di temperatura termodinamica, per ogni ciclo di Carnot

---

<sup>8</sup>È sufficiente considerare un ciclo di Carnot percorso da un gas perfetto e dimostrare che il rapporto fra i calori scambiati dal gas lungo le isoterme equivale al rapporto fra le temperature delle sorgenti. Questo garantisce la proporzionalità fra le scale di temperatura del gas perfetto e quella termodinamica. Inoltre dato che le unità di temperatura sono le medesime, le due scale sono effettivamente uguali fra loro.

<sup>9</sup>Il concetto di entropia ha numerosi significati ed applicazioni in diverse parti. Ad esempio in meccanica statistica abbiamo l’entropia di Gibbs, e l’entropia Tsallis, nella teoria dell’informazione e dei processi statistici abbiamo entropia di Shannon, l’entropia di Renyi ecc... Per una semplice variabile aleatoria il concetto di entropia fornisce una misura dell’entità del partizionamento dello spazio campione.

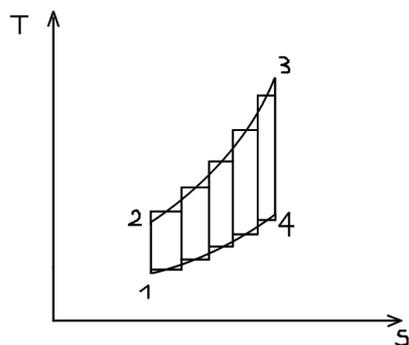


Figura 1.2: Decomposizione di un ciclo ideale di Bryton-Joule in una sovrapposizione di cinque cicli di Carnot. In questo caso particolare il rapporto fra le temperature dei cicli Carnot è lo stesso essendo  $T_i/T_j = \beta^{(\gamma-1)/\gamma}$ , dunque essi hanno tutti lo stesso rendimento.

operante fra  $T_i$  e  $T_j$  possiamo scrivere

$$\frac{Q_i}{T_i} = \frac{Q_j}{T_j} \quad (1.31)$$

Se sommiamo su tutte le sorgenti di calore, tenuto conto dei segni di  $Q_i$  e del fatto che ogni ciclo scambia solo con due sorgenti di calore otteniamo

$$\sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{T_k} = 0 \quad (1.32)$$

Per  $n \rightarrow \infty$ , questa quantità converge a

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \quad (1.33)$$

D'altra parte se localmente il ciclo compiuto dal sistema non è reversibile (questo ciclo è quello compreso fra le due adiabatiche reversibili e le due trasformazioni reali del sistema) dal teorema di Carnot<sup>10</sup> segue che  $Q_j/T_j \geq Q_i/T_i$  ( $Q_j$  ceduto,  $Q_i$  ricevuto). Questa circostanza ci porta alla *disuguaglianza di Clausius*

$$\boxed{\oint \frac{dQ}{T} \leq 0} \quad (1.34)$$

### 1.2.1 Definizione macroscopica di entropia

Per ogni ciclo termodinamico *reversibile* vale (1.33), cioè la circolazione di  $dQ/T$  è nulla. Se il dominio dell'integrale è sufficientemente regolare, questa condizione ci dice che deve esistere un potenziale per  $dQ/T$ , cioè una funzione di stato  $S$  che chiamiamo *entropia* tale che

$$S_b - S_a = \int_a^b \frac{dQ}{T} \quad (1.35)$$

<sup>10</sup>Infatti  $\epsilon_c \geq \epsilon$  comporta che  $T_j/T_i \leq Q_j/Q_i$ , pertanto  $Q_i/T_i - Q_j/T_j \leq 0$ .

L'integrale deve essere calcolato *lungo una trasformazione reversibile* che connette due stati di equilibrio termodinamico. L'entropia è una proprietà termodinamica estensiva. Se consideriamo un ciclo composto da due trasformazioni "r" ed "i", una reversibile l'altra no, per esso vale la disuguaglianza di Clausius

$$\int_{ai}^b \frac{dQ}{T} + \int_{br}^a \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad S_b - S_a \geq \int_{ai}^b \frac{dQ}{T} \quad (1.36)$$

Dall'ultima disuguaglianza deduciamo che per ogni processo adiabatico  $a \rightarrow b$  di un sistema chiuso

$$\boxed{S_b \geq S_a} \quad (1.37)$$

In particolare vale il segno di uguaglianza se il processo è reversibile. La precedente disequazione è nota come *teorema dell'aumento dell'entropia*.

### 1.2.2 Lavoro massimo e funzione di disponibilità

Il principio dell'aumento dell'entropia limita il lavoro massimo ottenibile in un processo energetico di una macchina  $M$  che scambia calore con una sorgente  $S$  alla temperatura  $T_0$ . Infatti, applicando il primo principio della termodinamica al sistema  $M + S$  (gli scambi di calore sono nulli attraverso il contorno di tale sistema)

$$(E_2 - E_1)_M + (E_2 - E_1)_S = L \quad (1.38)$$

Per la sorgente di calore a temperatura  $T_0$  l'equazione di Gibbs porge  $(E_2 - E_1)_S = T_0(S_2 - S_1)_S$ . Il principio di aumento dell'entropia ci dice che per il sistema adiabatico  $M + S$ , deve risultare

$$T_0(S_2 - S_1)_M + T_0(S_2 - S_1)_S \geq 0 \quad (1.39)$$

Sommando le ultime due espressioni troviamo

$$L \leq (E_2 - E_1)_M - T_0(S_2 - S_1)_M \quad (1.40)$$

Cioè il lavoro massimo ottenibile dalla macchina  $M$  è pari alla differenza fra la funzione di disponibilità nei due stati 2 e 1

$$\Omega = E - T_0S \quad (\text{funzione di disponibilità}) \quad (1.41)$$

Il suddetto lavoro massimo si realizza in condizioni di reversibilità della trasformazione. Notare la similitudine fra la definizione della funzione di disponibilità e l'energia libera di Helmholtz.

## Capitolo 2

# Equazioni della dinamica dei fluidi e dello scambio di calore

### 2.1 Il teorema del trasporto

Consideriamo un volume di particelle il cui moto sia riferito ad un sistema di coordinate curvilineo anch'esso in moto. Consideriamo un campo scalare  $\mathfrak{S}(\boldsymbol{\eta}, t)$  nella medesima regione di spazio e chiediamoci come varia nel tempo la quantità:

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_{V(t)} \mathfrak{S}(\boldsymbol{\eta}, t) \sqrt{g} d\eta^1 d\eta^2 d\eta^3 \quad (2.1)$$

ove  $d/dt$  indica derivazione a particella costante. Tale derivazione si dice *derivata materiale o sostanziale*. Per prima cosa è utile riferire la descrizione a coordinate materiali, in modo tale che il dominio dell'integrale non dipenda più dal tempo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathfrak{S}(\boldsymbol{\eta}, t) \sqrt{g} d\eta^1 d\eta^2 d\eta^3 &= \int_{V_0} \frac{d}{dt} (\mathfrak{S}'(\boldsymbol{\xi}, t) \sqrt{\gamma}) d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \\ &= \int_{V_0} \left( \frac{d\mathfrak{S}'}{dt} + \frac{1}{2} \mathfrak{S}' \gamma^{ij} \frac{d\gamma_{ij}}{dt} \right) \sqrt{\gamma} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \\ &= \int_{V(t)} \left( \frac{d_c \mathfrak{S}}{dt} + \frac{1}{2} \mathfrak{S} g^{ij} \underbrace{\frac{d_c g_{ij}}{dt}}_{2e_{ij}} \right) \sqrt{g} d\eta^1 d\eta^2 d\eta^3 \\ &= \int_{V(t)} \left( \frac{\delta \mathfrak{S}}{\delta t} + \mathfrak{S} u_{;m}^m \right) \sqrt{g} d\eta^1 d\eta^2 d\eta^3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

In questi passaggi abbiamo utilizzato il risultato (vd. appendice A.3)

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma \gamma^{ij} \frac{d\gamma_{ij}}{dt} \quad (2.3)$$

che rappresenta la derivata materiale del determinante della metrica del sistema di coordinate *lagrangiano*. Le componenti di  $d\gamma_{ij}/dt$  in un qualunque sistema di coordinate sono delle derivate convettive ed è facile provare che esse sono pari al doppio del tensore delle velocità di deformazione

$$\frac{d_c g_{ij}}{dt} = 2e_{ij} \quad (2.4)$$

### 2.1.1 Equazione di continuità

Nel caso in cui  $\mathfrak{S}(\boldsymbol{\eta}, t) = \rho(\boldsymbol{\eta}, t)$ , dalla legge di conservazione della massa contenuta in volume materiale  $dM/dt = 0$  il cui moto sia riferito ad un sistema curvilineo otteniamo

$$\boxed{\frac{\delta \rho}{\delta t} + \rho u_{;m}^m = 0} \quad (2.5)$$

che può scriversi come

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho u^m)_{;m} - \frac{\partial \rho}{\partial \eta^k} U^k = 0 \quad (2.6)$$

### 2.1.2 Lemma di conservazione dell'impulso

In coordinate generali la costanza delle componenti di un vettore non implica la costanza del vettore. Pertanto consideriamo la proiezione della densità impulso  $\rho \mathbf{u}$  nella direzione di un campo vettoriale parallelo ed arbitrario  $\mathbf{l}$ . Applicando il teorema del trasporto, otteniamo

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho u^i l_i dV = \int_{V(t)} \left( \frac{\delta (\rho u^i l_i)}{\delta t} + \rho u^i l_{i;u^m} \right) dV. \quad (2.7)$$

Tenendo conto dell'equazione di continuità (2.5) e del parallelismo del campo vettoriale  $l_i$  ( $\delta l_i / \delta t = 0$ ), la funzione integranda al membro di destra può scriversi come

$$\frac{\delta (\rho u^i l_i)}{\delta t} + \rho u^i l_{i;u^m} = \rho \frac{\delta u^i}{\delta t} l_i. \quad (2.8)$$

Otteniamo così la seguente relazione di trasporto dell'impulso

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho u^i l_i dV = \int_{V(t)} \rho \frac{\delta u^i}{\delta t} l_i dV. \quad (2.9)$$

## 2.2 Equazioni della dinamica dei fluidi

In questa sezione consideriamo le leggi fondamentali di bilancio di impulso e di momento dell'impulso in coordinate generali.

### 2.2.1 Conservazione dell'impulso

Possiamo esprimere la forza totale agente su un volume di particelle in moto  $V(t)$  attraverso come risultante di forze di massa specifiche  $\mathbf{f}$  e di sforzi  $\mathbf{t}$  agenti sulla superficie che delimita il volume stesso. Se riferiamo la descrizione del flusso ad un sistema di coordinate curvilineo in moto allora è opportuno proiettare la suddetta risultante lungo un arbitrario campo vettoriale parallelo  $\mathbf{l}$ . Infatti non è corretto considerare semplicemente le componenti della forza lungo i versori del sistema di coordinate curvilineo  $\boldsymbol{\eta}$  dato che la costanza di tali componenti non implica la costanza del campo. A seguito della suddetta

proiezione otteniamo un integrale di un un campo scalare. Applichiamo il principi della dinamica Newtoniana secondo cui la variazione dell'impulso totale nella direzione del campo  $\mathbf{l}$  (arbitraria) eguaglia la forza totale agente nella stessa direzione

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{l} dV = \int_{V(t)} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{l} dV + \int_{S(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{l} dS \quad (2.10)$$

Esplicitando le componenti tensoriali dei vettori nel sistema di coordinate  $\boldsymbol{\eta}$  otteniamo

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho u^i l_i dV = \int_{V(t)} \rho f^i l_i dV + \int_{S(t)} \underbrace{T^{ij} n_j}_{t^i} l_i dS \quad (2.11)$$

in cui  $dV = \sqrt{g} d\eta^1 d\eta^2 d\eta^3$ . Applicando il teorema di Gauss-Green in coordinate curvilinee possiamo scrivere

$$\int_{S(t)} T^{ij} n_j l_i dS = \int_{V(t)} (T^{ij} l_i)_{;j} dV = \int_{V(t)} T_{;j}^{ij} l_i dV \quad (2.12)$$

dato che il campo  $l_i$  è un campo parallelo ( $l_{i;j} = 0$ ). Pertanto (2.11) equivale alla

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho u^i l_i dV = \int_{V(t)} \rho f^i l_i dV + \int_{V(t)} \rho T_{;j}^{ij} l_i dV \quad (2.13)$$

dalla quale, essendo  $V(t)$  ed  $l_i$  arbitrari, otteniamo le seguenti equazioni di Cauchy

$$\boxed{\rho \frac{\delta u^i}{\delta t} = \rho f^i + T_{;j}^{ij}} \quad (2.14)$$

valide in coordinate generali.

### 2.2.2 Conservazione del momento dell'impulso

Consideriamo la proiezione del momento della quantità di moto su un arbitrario campo vettoriale parallelo  $\mathbf{l}$ . In assenza di momento angolare intrinseco del fluido abbiamo il seguente bilancio

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} (\tilde{\boldsymbol{\eta}} \wedge \rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{l} dV = \int_{V(t)} (\tilde{\boldsymbol{\eta}} \wedge \rho \mathbf{f}) \cdot \mathbf{l} dV + \int_{S(t)} (\tilde{\boldsymbol{\eta}} \wedge \mathbf{t}_n) \cdot \mathbf{l} dS \quad (2.15)$$

in cui  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$  è il vettore posizione che congiunge un punto "O" (il polo rispetto al quale si valuta il momento) solidale al sistema  $\boldsymbol{\eta}$  con un generico punto appartenente allo stesso sistema. Il prodotto vettoriale di due vettori in coordinate generali è un vettore le cui componenti tensoriali sono

$$[\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}]_i = \epsilon_{ijk} a^j b^k \quad (2.16)$$

ove  $\epsilon_{ijk}$  è il tensore covariante (non la densità tensoriale) di Ricci-Levi Civita

$$\epsilon_{ijk} = \sqrt{g} \varepsilon_{ijk} \quad (\varepsilon_{ijk} \text{ è simbolo di permutazione}) \quad (2.17)$$

Evitiamo inessenziali complicazioni di calcolo introdotte dal sistema di coordinate in moto e consideriamo coordinate curvilinee fisse  $\boldsymbol{\eta}$ . In quest'ultimo caso la metrica ed il relativo

determinante *non* sono funzioni del tempo. La proiezione del momento della quantità di moto relativamente ad un certo punto “*O*” si scrive come

$$\int_{V(t)} \rho \epsilon_{ijk} \tilde{\eta}^j u^k l^i dV \quad (2.18)$$

in cui  $l^i$  sono le componenti controvarianti del campo vettoriale parallelo. Applicando il teorema del trasporto otteniamo

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \epsilon_{ijk} \tilde{\eta}^j u^k l^i dV = \int_{V(t)} \rho \epsilon_{ijk} \tilde{\eta}^j \frac{\delta u^k}{\delta t} l^i dV \quad (2.19)$$

Pertanto il bilancio del momento della quantità di moto *in assenza di momento angolare intrinseco* è

$$\int_{V(t)} \rho \epsilon_{ijk} \tilde{\eta}^j \frac{\delta u^k}{\delta t} l^i dV = \int_{V(t)} \rho \epsilon_{ijk} \tilde{\eta}^j f^k l^i dV + \int_{S(t)} \epsilon_{ijk} \tilde{\eta}^j T^{kp} n_p l^i dS \quad (2.20)$$

$$= \int_{V(t)} \rho \epsilon_{ijk} \tilde{\eta}^j f^k l^i dV + \int_{V(t)} \epsilon_{ijk} l^i \left( \tilde{\eta}^j T^{kp} \right)_{;p} dS \quad (2.21)$$

ove abbiamo applicato il teorema di Gauss-Green utilizzando il fatto che le derivate covarianti del tensore di Ricci-Levi Civita sono identicamente nulle (stessa cosa dicasi per le derivate covarianti della metrica e del determinante della metrica). Riscriviamo (2.21) nella forma

$$\int_{V(t)} \epsilon_{ijk} \tilde{\eta}^j l^i \left( \rho \frac{\delta u^k}{\delta t} - \rho f^k - T_{;p}^{kp} \right) dV = \int_{V(t)} \epsilon_{ijk} l^i T^{kp} \tilde{\eta}_{;p}^j dV \quad (2.22)$$

Tenendo conto delle equazioni di Cauchy e della arbitrarietà del volume  $V$  abbiamo

$$\epsilon_{ijk} l^i T^{kp} \tilde{\eta}_{;p}^j = 0 \quad (2.23)$$

che equivale a

$$\epsilon_{ijk} l^i T^{kj} = 0 \quad (2.24)$$

Se esprimiamo (2.24) componente per componente abbiamo:

$$\sqrt{g} (T^{32} - T^{23}) l^1 = 0 \quad (2.25)$$

$$\sqrt{g} (T^{13} - T^{31}) l^2 = 0 \quad (2.26)$$

$$\sqrt{g} (T^{23} - T^{32}) l^3 = 0 \quad (2.27)$$

Dunque la conservazione del momento angolare per un continuo che non manifesta momento angolare intrinseco comporta la simmetria del tensore degli sforzi. Tale simmetria si può provare anche utilizzando un parallelepipedo infinitesimo di Cauchy in assenza di momenti intrinseci, imponendo l’equilibrio alla rotazione relativamente ai tre assi.

**Fluidi polari** Vi sono fluidi detti *fluidi polari* in grado di “accumulare” coppie e torsioni indotte dall’esterno. Questo accumulo può avvenire grazie ad una variazione di un *momento angolare intrinseco* dei costituenti del fluido. Alcuni polimeri, alcuni fluidi non-Newtoniani ed alcuni gas tipicamente con molecole poliatomiche sono un esempio. Se il fluido non è polare la conservazione del momento angolare implica la simmetria del

tensore degli sforzi. Stessa cosa *non* può dirsi per i fluidi polari. In quest'ultimo caso occorre aggiungere alle equazioni di bilancio una forza di torsione di massa  $\mathbf{M}_f$  ed uno sforzo di torsione di superficie  $\mathbf{M}_n$ . Tali sforzi di torsione aggiuntivi sono in equilibrio con il *momento angolare intrinseco*  $\mathbf{M}_i$ , che va aggiunto al momento angolare secondo il bilancio

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho (\mathbf{M}_i + \tilde{\boldsymbol{\eta}} \wedge \mathbf{u}) \cdot dV = \int_{V(t)} \rho (\mathbf{M}_f + \tilde{\boldsymbol{\eta}} \wedge \mathbf{f}) \cdot dV + \int_{S(t)} (\mathbf{M}_n + \tilde{\boldsymbol{\eta}} \wedge \mathbf{t}_n) \cdot dS \quad (2.28)$$

Nel caso di fluidi polari pertanto il tensore degli sforzi non è simmetrico e la sua parte non simmetrica contribuisce all'incremento del momento angolare intrinseco. In altre parole se il fluido, soggetto all'azione di sforzi di torsione, è in grado di immagazzinare momento angolare intrinseco allora il tensore degli sforzi non è simmetrico ed avremo uno scambio di momento fra la sua parte simmetrica e quella antisimmetrica. Tensori degli sforzi non simmetrici vengono fuori in modo naturale dalla teoria cinetica dei gas costituiti da molecole non simmetriche. Infatti ogni molecola è in grado di scambiare momento angolare ed impulso a seguito di urti con altre molecole.

### 2.2.3 Principio di dissipazione dell'energia meccanica

Moltiplichiamo (2.14) per  $u_k$  e contraiamo l'indice  $i$  con l'indice  $k$ . Otteniamo l'equazione scalare

$$\rho u_i \frac{\delta u^i}{\delta t} = \rho f^i u_i + u_i T_{;j}^{ij} \quad (2.29)$$

È facile dimostrare che<sup>1</sup>

$$u_i \frac{\delta u^i}{\delta t} = \frac{1}{2} \frac{\delta (u_i u^i)}{\delta t} = \frac{1}{2} \frac{\delta u^2}{\delta t} \quad (2.31)$$

La quantità al membro di destra è la densità di energia cinetica della particella espressa in coordinate arbitrarie. Giova rilevare che tale energia è ottenuta come prodotto delle componenti tensoriali della velocità, non come prodotto di componenti fisiche<sup>2</sup>. Inoltre, nell'ipotesi di assenza di momento angolare intrinseco del fluido, possiamo utilizzare la

<sup>1</sup>Poichè la derivata intrinseca della metrica  $g_{ij}$  è identicamente nulla abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\delta (u_i u^i)}{\delta t} &= u_i \frac{\delta u^i}{\delta t} + u^i \frac{\delta u_i}{\delta t} \\ &= u_i \frac{\delta u^i}{\delta t} + g^{im} u_m \frac{\delta (g_{il} u^l)}{\delta t} \\ &= u_i \frac{\delta u^i}{\delta t} + \delta_l^m u_m \frac{\delta u^l}{\delta t} + g^{im} u_m u^l \frac{\delta g_{il}}{\delta t} \\ &= 2u_i \frac{\delta u^i}{\delta t} \end{aligned} \quad (2.30)$$

<sup>2</sup>Infatti in coordinate cartesiane ortogonali  $\mathbf{x}$  abbiamo

$$E_c = \rho \frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}^i = \rho \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial \eta^m} \frac{\partial \hat{\eta}^n}{\partial x^i} u^m u_n = \rho \frac{1}{2} u_m u^m \quad (2.32)$$

simmetria del tensore degli sforzi  $T^{ij}$  e scrivere<sup>3</sup>

$$u_i T_{;j}^{ij} = (T^{ij} u_i)_{;j} - u_{i;j} T^{ij} \quad (2.34)$$

$$= (T^{ij} u_i)_{;j} - e_{ij} T^{ij} \quad (2.35)$$

Otteniamo infine

$$\frac{1}{2} \rho \frac{\delta u^2}{\delta t} = \rho f^i u_i + (T^{ij} u_i)_{;j} - e_{ij} T^{ij} \quad (2.36)$$

Conviene esprimere il termine  $e_{ij} T^{ij}$  in altro modo. Osserviamo che la relazione costitutiva di una classe molto ampia di fluidi può essere posta nella forma

$$\boxed{T^{ij} = -p g^{ij} + P^{ij}} \quad (2.37)$$

in cui  $p$  è la pressione *idrostatica* e  $P^{ij}$  è un tensore che rappresenta gli effetti degli sforzi viscosi e/o eventualmente degli sforzi viscoelastici

$$\begin{aligned} e_{ij} T^{ij} &= -p e_m^m + \underbrace{e_{ij} P^{ij}}_{\mathcal{D}} \\ &= -p u_{;m}^m + \mathcal{D} \end{aligned} \quad (2.38)$$

in cui  $\mathcal{D}$  è la *dissipazione*. Sostituendo (2.38) in (2.36) otteniamo

$$\boxed{\frac{1}{2} \rho \frac{\delta u^2}{\delta t} = \rho f^i u_i + (T^{ij} u_i)_{;j} + p u_{;m}^m - \mathcal{D}} \quad (2.39)$$

Quest'ultima equazione rappresenta la forma differenziale del principio di conservazione dell'energia meccanica. L'equazione (2.39) può essere integrata su un volume *fisso* relativamente al sistema di coordinate (vd. §2.7.3) oppure su un volume in moto con le particelle del fluido. In quest'ultimo caso otteniamo

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \frac{1}{2} \rho u^2 dV = \int_{V(t)} \rho f^i u_i dV + \int_{S(t)} t^i u_i dS + \int_{V(t)} p u_{;i}^i dV - \int_{V(t)} \mathcal{D} dV \quad (2.40)$$

Pertanto, la variazione di energia cinetica di un volume di particelle di fluido in moto è pari al lavoro che le particelle hanno fatto per muoversi nel campo di forze di massa  $f^i$  più il lavoro fatto per modificare la forma della superficie sotto l'azione degli sforzi di superficie, più il lavoro accumulato nel volume per compressione (solo se il fluido è comprimibile), meno l'energia dissipata per effetto degli sforzi viscosi. Dall'equazione di continuità (2.5) abbiamo  $\rho u_{;m}^m = -\delta \rho / \delta t$ , dunque

$$p u_{;m}^m = -\frac{p}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta t} \quad (2.41)$$

Pertanto possiamo scrivere, equivalentemente

$$\frac{1}{2} \rho \frac{\delta u^2}{\delta t} = \rho f^i u_i + (T^{ij} u_i)_{;j} - \frac{p}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta t} - \mathcal{D} \quad (2.42)$$

---

<sup>3</sup>Basta osservare che

$$u_{i;j} T^{ij} = \frac{1}{2} (u_{i;j} T^{ij} + u_{j;i} T^{ji}) = \frac{1}{2} (u_{i;j} + u_{j;i}) T^{ij} = e_{ij} T^{ij} \quad (2.33)$$

## 2.3 Termodinamica dei fluidi

### 2.3.1 Termodinamica di un elemento fluido e forma intrinseca del primo principio

Per ogni sistema chiuso che compie una trasformazione infinitesima e quasi statica (passando cioè attraverso stati di equilibrio termodinamico) possiamo scrivere

$$de = Tds - pdv \quad (\text{equazione di Gibbs}) \quad (2.43)$$

È importante osservare che l'equazione di Gibbs non richiede la reversibilità della trasformazione<sup>4</sup>. Nella termodinamica dei fluidi il "sistema chiuso" è un volumetto infinitesimo in moto con il fluido e si chiama "elemento fluido". Per trattare la termodinamica dell'elemento fluido secondo la teoria dell'equilibrio termodinamico *locale* (cioè supponendo che ogni elemento fluido compia trasformazioni infinitesime e quasi statiche in tempi infinitesimi) occorre anzitutto estendere la definizione della funzione energia interna, entalpia pressione ecc... ad una funzione dell'elemento fluido e del tempo, cioè occorre considerare *campi* scalari di energia interna, entalpia, pressione ecc... Il fatto che ogni elemento fluido sia circondato da altri elementi fluidi comporta inoltre che tali campi interagiscano con sé stessi (*self-interaction*) e fra loro secondo una legge differenziale che determiniamo nelle prossime sezioni. Se consideriamo un elemento fluido identificato da un intorno di una particella materiale  $\xi$  allora i differenziali in (2.43) vanno intesi nel senso del tempo.

Supponiamo pertanto che ogni elemento fluido compia in un tempo infinitesimo una trasformazione infinitesima e quasi statica. Un osservatore in moto con le particelle (avremo un osservatore diverso per ogni particella) esegue le sue misurazioni e valuta in qualche modo le variazioni infinitesime energia interna  $de(\xi, t)$ , entropia  $ds(\xi, t)$  e di volume specifico  $dv(\xi, t)$ . Quando queste variazioni sono riportate in coordinate curvilinee generali  $\eta$ , occorre calcolarsi le componenti delle suddette variazioni nelle nuove coordinate. Queste variazioni sono delle derivate convettive. Pertanto scriveremo il primo principio della termodinamica in coordinate  $\eta$  come segue<sup>5</sup>

$$\frac{d_c e}{dt} = T \frac{d_c s}{dt} - p \frac{d_c v}{dt} \quad (2.45)$$

Abbiamo stabilito inoltre che la derivata convettiva di uno scalare coincide con la sua derivata intrinseca e con la sua derivata materiale. Pertanto l'espressione (2.45) può scriversi equivalentemente come

$$\frac{\delta e}{\delta t} = T \frac{\delta s}{\delta t} - p \frac{\delta v}{\delta t} \quad (2.46)$$

---

<sup>4</sup>Molte trattazioni erroneamente deducono l'equazione di Gibbs dal primo principio della termodinamica  $de = dq - dl$  sostituendo  $dq = Tds$  e  $dl = pdv$ . Ovviamente la sostituzione  $dq = Tds$  vale soltanto se la trasformazione è reversibile, la qual cosa potrebbe suggerire che anche l'equazione di Gibbs vale esclusivamente in tali ipotesi di reversibilità. In realtà l'equazione di Gibbs può essere ottenuta manipolando esclusivamente la funzione di stato  $e(s, v)$ , senza introdurre alcuna ipotesi sulla trasformazione compiuta dal sistema.

<sup>5</sup>Se i differenziali in (2.43) sono intesi nel senso del tempo è evidente che tale relazione equivale a:

$$\frac{de}{dt} dt = T \frac{ds}{dt} dt - p \frac{dv}{dt} dt \quad (2.44)$$

da cui segue (2.45).

### 2.3.2 Principio di conservazione dell'energia totale

Supponiamo la densità di energia di un elemento fluido sia

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2}u^2 + e \quad [\text{kJ/kg}] \quad (2.47)$$

cioè sia semplicemente la somma della sua energia cinetica della sua energia interna. La variazione di energia totale contenuta in un volume di particelle in moto sarà data da<sup>6</sup>

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathfrak{E} dV \quad [\text{kJ}] \quad (2.48)$$

in cui l'elemento di volume invariante è, al solito,  $dV = \sqrt{g} d\eta^1 d\eta^2 d\eta^3$  Tale variazione è dovuta a:

- lavoro (per unità di tempo) di sforzi di superficie  $t^i u_i$
- lavoro (per unità di tempo) di forze di massa  $f^i u_i$
- flussi di energia termica  $q^i n_i$  attraverso il contorno del volume  $V(t)$
- termini generativi

Con la convenzione di assumere positiva l'energia termica entrante, ed assumendo  $n_i$  normale esterna a  $V(t)$  abbiamo il bilancio

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathfrak{E} dV = \int_{V(t)} \rho f^i u_i dV + \int_{S(t)} t^i u_i dS - \int_{S(t)} q^i n_i dS + \int_{V(t)} q_g dV \quad (2.49)$$

che per  $V(t)$  arbitrario equivale alla condizione

$$\boxed{\rho \frac{\delta \mathfrak{E}}{\delta t} = \rho f^i u_i + (T^{ij} u_i)_{;j} + q_g - q_{;j}^j} \quad (2.50)$$

### 2.3.3 Evoluzione del campo di energia interna e di entalpia

Consideriamo il bilancio di energia totale (2.50) ed esplicitiamo i termini che compongono  $\mathfrak{E}$  secondo (2.47)

$$\rho \left( \frac{1}{2} \frac{\delta u^2}{\delta t} + \frac{\delta e}{\delta t} \right) = \rho f^i u_i + (T^{ij} u_i)_{;j} + q_g - q_{;j}^j \quad (2.51)$$

Utilizziamo ora il teorema di bilancio dell'energia meccanica locale (2.42) per eliminare  $\frac{1}{2} \frac{\delta u^2}{\delta t}$ . Otteniamo

$$\boxed{\rho \frac{\delta e}{\delta t} = e_{ij} T^{ij} - q_{;j}^j + q_g} \quad (2.52)$$

Possiamo riscrivere quest'ultima espressione in forma entalpica utilizzando la definizione di entalpia  $h = e + p/\rho$ . Considerando sempre una derivazione di tipo convettivo di questa

<sup>6</sup>In pratica consideriamo il trasporto dello scalare  $\mathfrak{E}$  che rappresenta l'energia totale del fluido. Il moto del sistema di coordinate non influenza il valore di energia totale del fluido.

espressione otteniamo la seguente relazione (in cui abbiamo sostituito  $d_c/dt$  con  $\delta/\delta t$ , trattandosi di campi scalari)

$$\frac{\delta h}{\delta t} = \frac{\delta e}{\delta t} + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta t} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\delta \rho}{\delta t} \quad (2.53)$$

Sostituendo (2.53) in (2.52) otteniamo

$$\rho \frac{\delta h}{\delta t} = \frac{\delta p}{\delta t} - \frac{p}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta t} + e_{ij} T^{ij} - q_{;j}^j + q_g \quad (2.54)$$

Inoltre possiamo esplicitare il termine  $e_{ij} T^{ij}$  utilizzando la relazione (2.41)

$$\rho \frac{\delta e}{\delta t} = \frac{p}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta t} + \mathcal{D} - q_{;j}^j + q_g \quad (2.55)$$

$$\rho \frac{\delta h}{\delta t} = \frac{\delta p}{\delta t} + \mathcal{D} - q_{;j}^j + q_g \quad (2.56)$$

Queste equazioni definiscono l'evoluzione temporale dei campi di energia interna ed entalpia del fluido in coordinate generali. Come vedremo nella prossima sezione, È possibile trasformare tali equazioni in relazioni fra coordinate termodinamiche  $(p, v, T)$ , direttamente *osservabili*.

### 2.3.4 Equazione di Fourier

L'equazione di Fourier rappresenta una particolare espressione dei bilanci di energia interna (2.55) e di entalpia (2.56) in funzione di osservabili direttamente misurabili quali  $(p, v, T)$ . Per ottenere una tale rappresentazione è necessario analizzare la *termodinamica intrinseca* di ogni elemento fluido al fine di ottenere delle relazioni che caratterizzano la variazione dell'energia interna e dell'entalpia dell'elemento stesso in funzione di  $(p, v, T)$ . Successivamente si possono trasformare i risultati ottenuti in coordinate arbitrarie impiegando il concetto di derivata convettiva.

**Relazioni di Maxwell** Consideriamo la forma intrinseca del primo principio della termodinamica (equazione di Gibbs) applicato ad un elemento fluido (cioè in coordinate materiali  $\xi$ )

$$de(s, v) = Tds - pdv \quad (\text{Equazione di Gibbs}) \quad (2.57)$$

Consideriamo anche la definizione di entalpia, di energia libera di Gibbs e di energia libera di Helmholtz

$$h = e + pv \quad (2.58)$$

$$g = h - Ts \quad (\text{energia libera di Gibbs}) \quad (2.59)$$

$$f = e - Ts \quad (\text{energia libera di Helmholtz}) \quad (2.60)$$

Valutando il differenziale convettivo di tali equazioni ed impiegando (2.57) è facile ottenere

$$dh(p, s) = vdp + Tds \quad (2.61)$$

$$dg(p, T) = vdp - sdT \quad (2.62)$$

$$df(v, T) = -pdv - sdT \quad (2.63)$$

Da queste equazioni, considerando l'espressione del differenziale convettivo delle funzioni  $e(s, v)$ ,  $h(s, p)$ ,  $g(p, T)$  ed  $f(v, T)$  segue che

$$\left(\frac{\partial e}{\partial s}\right)_v = T \quad \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_s = -p \quad (2.64)$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p = T \quad \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s = v \quad (2.65)$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_T = v \quad \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_p = -s \quad (2.66)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T = -p \quad \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v = -s \quad (2.67)$$

calcolandosi le derivate seconde delle precedenti ed uguagliando i termini otteniamo la seguenti *relazioni di Maxwell*

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v \quad (2.68)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p \quad (2.69)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \quad (2.70)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T \quad (2.71)$$

**Equazioni di entropia** Dalle (2.57) notiamo che se riusciamo ad esprimere  $ds$  come sola funzione delle variabili termodinamiche  $p$ ,  $v$  e  $T$  allora possiamo esprimere  $du/dt$  e  $dh/dt$  come sola funzione delle variabili termodinamiche. Pertanto consideriamo scriviamoci il differenziale materiale  $ds$  considerando la funzione di stato entropia come funzione di  $s(T, v)$  ed  $s(T, p)$

$$\begin{aligned} ds(T, v) &= \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T dv \\ &= \frac{c_v}{T} dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v dv \quad (\text{prima eq. di entropia}) \end{aligned} \quad (2.72)$$

ove abbiamo utilizzato (2.71) e

$$c_v = \left(\frac{dq}{dT}\right)_v = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v \quad (2.73)$$

Equivalentemente

$$\begin{aligned} ds(T, p) &= \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T dp \\ &= \frac{c_p}{T} dT - \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dp \quad (\text{seconda eq. di entropia}) \end{aligned} \quad (2.74)$$

ove abbiamo utilizzato (2.70) e

$$c_p = \left(\frac{dq}{dT}\right)_v = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \quad (2.75)$$

**Equazioni di energia** Sostituendo (2.72) in (2.57) e (2.74) in (2.61) otteniamo

$$\frac{de}{dt} = c_v \frac{dT}{dt} + \left[ T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] \frac{dv}{dt} \quad (\text{prima eq. di energia}) \quad (2.76)$$

$$\frac{dh}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} + \left[ v - T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] \frac{dp}{dt} \quad (\text{seconda eq. di energia}) \quad (2.77)$$

Se trasformiamo (2.77) in un sistema di coordinate curvilineo  $\boldsymbol{\eta}$  sappiamo che le derivate materiali  $d/dt$  divengono derivate convettive  $d_c/dt$  e che queste ultime, per il caso particolare di campo scalare coincidono con le derivate intrinseche  $\delta/\delta t$ . Pertanto dalla (2.77) abbiamo

$$\rho \frac{\delta h}{dt} = \rho c_p \frac{\delta T}{\delta t} + \frac{\delta p}{\delta t} - \rho T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \frac{\delta p}{\delta t} \quad (2.78)$$

che, se confrontata con l'espressione (2.56) fornisce l'equazione di Fourier

$$\boxed{\rho c_p \frac{\delta T}{\delta t} = \mathcal{D} - q_{;m}^m + q_g + \beta T \frac{\delta p}{\delta t}} \quad (2.79)$$

in cui

$$\beta = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (2.80)$$

è il coefficiente di dilatazione isobaro. È possibile determinare anche una seconda relazione confrontando l'espressione

$$\rho \frac{\delta e}{\delta t} = \rho c_v \frac{\delta T}{\delta t} - \left[ T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] \frac{1}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta t} \quad (2.81)$$

con (2.55). Otteniamo

$$\boxed{\rho c_v \frac{\delta T}{\delta t} = \mathcal{D} - q_{;m}^m + q_g + \chi \frac{T p}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta t}} \quad (2.82)$$

in cui

$$\chi = \frac{1}{p} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \quad (2.83)$$

è il coefficiente di dilatazione isocoro.

**Osservazione** Nel caso in cui il continuo sia incomprimibile abbiamo  $\delta\rho/\delta t = 0$ ,  $\beta = 0$  e  $c_p = c_v$ . Le due equazioni (2.79) e (2.82) coincidono.

## 2.4 Equazione di bilancio dell'entropia e secondo principio della termodinamica per sistemi continui

Consideriamo l'equazione di Gibbs in forma intrinseca (2.46), moltiplicata per  $\rho$  ed in cui abbiamo scritto  $v = 1/\rho$

$$\rho \frac{\delta e}{\delta t} = \rho T \frac{\delta s}{\delta t} + \frac{p}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta t} \quad (2.84)$$

Utilizzando il bilancio di energia interna

$$\rho \frac{\delta e}{\delta t} = \frac{p}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta t} - q_{;i}^i + \mathcal{D} + q_g \quad (2.85)$$

è immediato ottenere

$$\boxed{\rho \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{\mathcal{D}}{T} - \frac{q_{;j}^j}{T} + \frac{q_g}{T}} \quad (2.86)$$

in cui  $\mathcal{D} = e_{ij} P^{ij}$ . Ignoriamo per il momento il calore generato  $q_g$  e riscriviamo il bilancio di entropia (2.86) come segue<sup>7</sup>

$$\rho \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{\mathcal{D}}{T} - \left( \frac{q^j}{T} \right)_{;j} - \frac{q^j}{T^2} T_{;j} \quad (2.88)$$

Indicando con  $V(t)$  un volume di particelle in moto, il secondo principio della termodinamica stabilisce che

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho s dV \geq - \int_{S(t)} n_j \frac{q^j}{T} dS \quad (\text{secondo principio}) \quad (2.89)$$

ossia che l'incremento di entropia in un certo volume in moto con il fluido non può essere inferiore al flusso di entropia che ha attraversato la superficie che delimita il volume stesso (il “-” è dovuto al fatto che  $\mathbf{n}$  è normale esterna ed abbiamo assunto  $q^i$  positivo se entrante). Se riteniamo (2.89) valida per un arbitrario volume di particelle in moto, otteniamo la forma differenziale

$$\boxed{\rho \frac{\delta s}{\delta t} \geq - \left( \frac{q^j}{T} \right)_{;j}} \quad (2.90)$$

Sostituendo (2.90) in (2.88) otteniamo la condizione

$$\rho \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{\mathcal{D}}{T} - \frac{q^j}{T^2} T_{;j} - \left( \frac{q^j}{T} \right)_{;j} \geq - \left( \frac{q^j}{T} \right)_{;j} \quad (2.91)$$

Dalla quale<sup>8</sup>

$$\boxed{q^j T_{;j} \leq \mathcal{D} T} \quad (2.93)$$

In assenza di flussi di calore dovuti alla conduttività termica del fluido  $q^j \equiv 0$  deduciamo  $\mathcal{D} \geq 0$ <sup>9</sup>. Per contro se consideriamo un fenomeno di conduzione in un solido indeformabile abbiamo  $e_{ij} \equiv 0$ , dunque  $\mathcal{D} = 0$ , cioè  $q^j T_{;j} \leq 0$ . Entrambi le  $\mathcal{D} \geq 0$ ,  $q^j T_{;j} \leq 0$  si portano dietro delle restrizioni, sia sulla forma delle equazioni della propagazione del calore, sia sulla natura della dissipazione.

<sup>7</sup>Infatti abbiamo

$$\frac{q_{;j}^j}{T} = \left( \frac{q^j}{T} \right)_{;j} - q^j \left( \frac{1}{T} \right)_{;j} = \left( \frac{q^j}{T} \right)_{;j} + \frac{q^j}{T^2} T_{;j} \quad (2.87)$$

<sup>8</sup>In presenza di generazione di calore abbiamo

$$q^j T_{;j} \leq (\mathcal{D} + q_g) T \quad (2.92)$$

<sup>9</sup>Se  $\mathcal{D} > 0$ , ossia in presenza di flussi viscosi, l'equazione di Fourier (2.79) prevede una variazione di temperatura positiva anche per fluidi non conduttivi. In questo caso il campo di temperatura è trasportato passivamente dal fluido, e generato in quelle zone in cui ha dissipazione viscosa.

**Propagazione dell'entropia in un fluido perfetto** È facile dimostrare che *un flusso di un fluido perfetto non conduttivo è necessariamente isoentropico*. Infatti la (2.86) per  $\mathcal{D} = 0$  e  $q^i = 0$  fornisce

$$\frac{\delta s}{\delta t} = 0 \quad (2.94)$$

Per contro, se il nostro fluido perfetto è conduttivo allora dalla (2.93) segue che

$$q^j T_{;j} \leq 0 \quad (2.95)$$

Se la conduzione è Fourieriana  $q^j = -k g^{ji} T_{;i}$ , la (2.95) comporta che

$$-k \underbrace{g^{ji} T_{;i} T_{;j}}_{\geq 0} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \geq 0 \quad (2.96)$$

cioè la conduttività termica deve essere strettamente positiva: il calore deve fluire verso gradienti di temperatura decrescenti, dal caldo al freddo per intenderci. Questa conclusione intuitiva discende dal secondo principio della termodinamica, anzi è il secondo principio enunciato da Clausius. Se la conduttività termica è uniforme, sempre dalla (2.86) segue che

$$\rho \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{k}{T} g^{ij} T_{;ij} = \frac{k}{T} \nabla^2 T = \frac{\rho c_p}{T} \frac{\delta T}{\delta t} \quad (2.97)$$

che è la legge di propagazione dell'entropia in un fluido perfetto conduttivo.

**Osservazione** La presenza di fenomeni di conduzione nel fluido comporta che le trasformazioni termodinamiche degli elementi fluidi non sono adiabatiche proprio a causa della diffusione della temperatura. Questa cosa ci deve mettere in guardia ad esempio dall'utilizzo delle leggi di trasformazione ( $\gamma = c_p/c_v$ )

$$pv^\gamma = c_1 \quad pT^{\gamma/(1-\gamma)} = c_2 \quad Tv^{1-\gamma} = c_3 \quad (2.98)$$

nel caso in cui si studi il moto di un fluido perfetto conduttivo, anche se pur debolmente. Tali equazioni infatti caratterizzano delle trasformazioni adiabatiche e reversibili di un gas perfetto, e non possono essere utilizzate assieme ad una ipotesi di conduttività. Quindi, se si utilizza tale equazione di stato l'equazione di Fourier diviene

$$\frac{\delta T}{\delta t} = 0 \quad (2.99)$$

come si deduce facilmente dalle (2.94) e (2.97). In questo caso pertanto la temperatura è semplicemente uno scalare passivo trasportato per advezione dalla velocità. Non vi è alcun fenomeno di diffusione di temperatura. Dunque un fluido perfetto è in moto isoentropico se e solo se la conduttività termica è nulla. In questa ipotesi un campo di temperatura può comunque propagarsi per trasporto passivo degli elementi fluidi, senza che avvenga alcun tipo di diffusione di calore fra un elemento e l'altro.

## 2.5 Relazioni costitutive

Vi è una distinzione fondamentale fra le equazioni del moto (o equazioni di campo) e le equazioni costitutive. Eseguendo un bilancio di quantità di moto abbiamo ottenuto la relazione di Cauchy

$$\rho \frac{\delta u^i}{\delta t} = \rho f^i + T^i_{;j} \quad (2.100)$$

Questa equazione pone in relazione il campo di velocità del fluido alle forze di massa  $f^i$  ed al tensore degli sforzi, ma non dice assolutamente nulla delle proprietà del continuo. Si tratta infatti di una legge universale valida per ogni continuo deformabile (fluidi, materiali elastici, materiali plastici, ecc...). Se consideriamo un continuo che non ha momento angolare intrinseco abbiamo visto inoltre che il tensore degli sforzi risulta essere simmetrico, cioè  $T^{ij} = T^{ji}$ . Le proprietà reologiche di un continuo, cioè come esso risponde a sforzi e/o a deformazioni devono essere caratterizzate in coordinate materiali. Inoltre tali proprietà risposta devono essere indipendenti dal particolare osservatore che le valuta. Ad esempio per un fluido di Stokes un elemento fluido in rototraslazione rigida non produce alcuno sforzo viscoso, cioè si ha una invarianza della legge costitutiva rispetto ad osservatori rigidi in rototraslazione.

### 2.5.1 Fluidi Stokesiani

Una larga classe di fluidi non è in grado di trasmettere sforzi di natura elastica o elastoplastica. Ciò significa che il tensore degli sforzi non può dipendere dal tensore di deformazione finita di un elemento fluido. Pertanto è lecito assumere che il tensore degli sforzi dipenda dalla velocità con cui avviene la deformazione.

**Cinematica di un elemento fluido** Se consideriamo un arbitrario campo di velocità e sviluppiamo le sue componenti in serie di Taylor intorno alla traiettoria di un elemento fluido centrato in  $\xi$  otteniamo

$$u_i(\hat{\eta} + d\hat{\eta}, t) = u_i(\hat{\eta}, t) + u_{i;j}(\hat{\eta}, t) d\hat{\eta}^j \quad (2.101)$$

in cui  $\hat{\eta}^j(\xi, t)$  è appunto la traiettoria di una particella  $\xi$ , il cui intorno è l'elemento fluido di cui ci occupiamo. Il gradiente di velocità può sempre essere decomposto in una parte simmetrica ed in una antisimmetrica

$$u_{i;j} = \underbrace{\frac{1}{2}(u_{i;j} + u_{j;i})}_{e_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}(u_{i;j} - u_{j;i})}_{\Omega_{ij}} \quad (2.102)$$

in cui  $e_{ij}$  rappresenta la velocità di deformazione pura mentre  $\Omega_{ij}$  è un tensore di rotazione rigida. Si può mostrare che in tempo infinitesimo una sfera contenuta nell'elemento fluido viene trasformata in un ellissoide ruotato. Questo risultato è noto come *decomposizione di Cauchy-Stokes* e ci dice che localmente l'atto di moto di un elemento fluido consiste in una rototraslazione rigida a cui è sovrapposta una deformazione pura.

**Ipotesi di Stokes** Un'ampia classe di fluidi reali ha un comportamento reologico che verifica le seguenti *ipotesi di Stokes*

1. il tensore degli sforzi  $T^{ij}$  è una funzione continua del tensore di deformazione  $e^{ij}$  e dello stato termodinamico locale, ed è indipendente da altre quantità cinematiche. Questa ipotesi segue dalla richiesta che un elemento fluido in rototraslazione rigida non sia soggetto ad alcuno sforzo viscoso;
2. il fluido è *omogeneo*, cioè il tensore degli sforzi non dipende esplicitamente da  $\eta$ ;
3. il fluido è *isotropo*, cioè le proprietà reologiche sono le medesime in tutte le direzioni (invarianza rispetto alla rotazione);

4. quando non vi è velocità di deformazione  $e^{ij}$  il tensore degli sforzi assume la forma idrostatica  $T^{ij} = -pg^{ij}$ , in cui  $p$  è la pressione termodinamica.

La prima assunzione comporta che la relazione fra tensione e velocità di deformazione è indipendente da una rotazione rigida di un elemento fluido. L'ipotesi di isotropia ci dice che il legame fra  $T^{ij}$  ed  $e^{ij}$  rimane immutato se eseguiamo una rotazione del sistema di coordinate<sup>10</sup> cioè

$$T^{ij} = f^{ij} (e^{lm}) \quad \Rightarrow \quad \bar{T}^{ij} = f^{ij} (\bar{e}^{lm}) \quad (2.103)$$

È possibile dimostrare che questa condizione implica che le direzioni principali di tensione coincidono con quelle di deformazione, cioè esiste una trasformazione che diagonalizza simultaneamente entrambi i tensori. Alla fine dei conti si ottiene il seguente tensore degli sforzi viscosi

$$P^{ij} = Ag^{ij} + Be^{ij} + Ce^{ik}e_k^j \quad (2.104)$$

in cui  $A$ ,  $B$  e  $C$  possono essere delle funzioni arbitrarie dei tre invarianti del tensore delle velocità di deformazione<sup>11</sup>

## 2.5.2 Fluidi Newtoniani

Un fluido Newtoniano esibisce un legame lineare fra la velocità di deformazione di un elemento fluido e lo stato di tensione. Per quantificare tale legame in modo rigoroso consideriamo un elemento fluido individuato da un intorno della particella materiale  $\xi$  e studiamone la deformazione in coordinate intrinseche. A tal fine consideriamo una seconda particella  $\xi + d\xi$  appartenente all'intorno di  $\xi$ . In figura 2.1 illustriamo le traiettorie delle suddette particelle in coordinate  $\eta$ . La distanza fra  $\xi + d\xi$  e  $\xi$  si esprime come

$$ds_0^2 = g_{ij}(\hat{\eta}, t_0) d\hat{\eta}^i d\hat{\eta}^j \quad (2.106)$$

ove

$$d\hat{\eta}^j = \hat{\eta}^j(\xi + d\xi, t_0) - \hat{\eta}^j(\xi, t_0) = \frac{\partial \hat{\eta}^j}{\partial \xi^k} d\xi^k \quad (2.107)$$

Sostituendo (2.107) in (2.106) troviamo

$$ds_0^2 = \gamma_{ij}(\xi, t_0) d\xi^i d\xi^j \quad (2.108)$$

in cui  $\gamma_{ij}$  è la metrica associata al moto del fluido in coordinate materiali. Con il passare del tempo i due punti  $\xi + d\xi$  e  $\xi$  varieranno la loro posizione mutua a causa della deformazione subita dall'elemento fluido ed avremo la nuova distanza

$$ds^2 = \gamma_{ij}(\xi, t) d\xi^i d\xi^j \quad (2.109)$$

<sup>10</sup>Questa era una delle ipotesi fatte da Stokes per identificare la relazione costitutiva. Nella moderna teoria delle equazioni costitutive vi è un principio molto più forte che deve essere soddisfatto: il principio di indifferenza materiale. Esso afferma che l'invarianza deve essere relativa ad un *qualunque* osservatore, non solo ad uno in rototraslazione locale.

<sup>11</sup>Ogni tensore simmetrico  $a_{ij}$  possiede tre invarianti che si ottengono dal problema agli autovalori

$$\det(a_{ij} - d\delta_{ij}) = I_1 + dI_2 + d^2I_3 - d^3 = 0 \quad (2.105)$$

$I_3$  è la traccia di  $a_{ij}$ ,  $I_2$  è una somma a segno alterno dei minori che si ottengono con un pivot che se ne va lungo la diagonale mentre  $I_1$  è il determinante di  $a_{ij}$ .

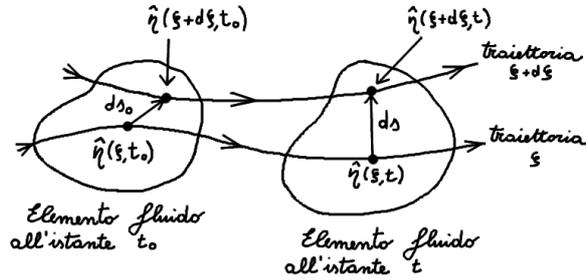


Figura 2.1: Deformazione di un elemento fluido fra due istanti di tempo.

espressa sempre in coordinate materiali. La quantità

$$ds^2 - ds_0^2 = [\gamma_{ij}(\boldsymbol{\xi}, t) - \gamma_{ij}(\boldsymbol{\xi}, t_0)] d\xi^i d\xi^j \quad (2.110)$$

$$= 2d_{ij}(\boldsymbol{\xi}, t, t_0) d\xi^i d\xi^j \quad (2.111)$$

definisce il *tensore di deformazione finita*

$$d_{ij}(\boldsymbol{\xi}, t, t_0) = \frac{1}{2} [\gamma_{ij}(\boldsymbol{\xi}, t) - \gamma_{ij}(\boldsymbol{\xi}, t_0)] \quad (2.112)$$

Esso rappresenta la deformazione al tempo  $t$  di un elemento fluido individuato da un intorno di  $\boldsymbol{\xi}$  rispetto alla configurazione di riferimento che tale elemento aveva al tempo  $t_0$ . Si considera il fattore  $1/2$  nella definizione di  $\eta_{ij}$  per motivi legati alla cinematica degli spostamenti<sup>12</sup>. In un sistema di coordinate solidale con le particelle non si apprezza la roto-traslazione di elementi fluidi. Dunque l'unico atto di moto che viene valutato è quello di deformazione pura. La derivata materiale del tensore di deformazione (seguendo la traiettoria di una generica particella  $\boldsymbol{\xi}$ ) è la velocità di deformazione

$$\epsilon_{ij}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{d(d_{ij})}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\gamma_{ij}}{dt} \quad (2.115)$$

La relazione lineare più generale fra questo tensore ed il tensore degli sforzi  $\pi^{ij}$  è

$$\pi^{ij} = \Lambda^{ijmn} \epsilon_{mn} \quad (2.116)$$

<sup>12</sup>Infatti se deriviamo  $ds^2$  rispetto al tempo notiamo che

$$2ds \frac{d(ds)}{dt} = \frac{d\gamma_{ij}}{dt} d\xi^i d\xi^j \quad (2.113)$$

dalla quale

$$\frac{1}{ds} \frac{d(ds)}{dt} = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{d\gamma_{ij}}{dt}}_{\epsilon_{ij}} \frac{d\xi^i}{ds} \frac{d\xi^j}{ds} \quad (2.114)$$

Ecco perché si considera il fattore  $1/2$  nella definizione del tensore di deformazione.

Si dimostra che un tensore isotropo<sup>13</sup> del quarto ordine in coordinate generali dipende solo da tre parametri  $(\lambda, \mu, \beta)$  secondo la relazione

$$\Lambda^{ijpq} = \lambda \gamma^{ij} \gamma^{pq} + \mu (\gamma^{ip} \gamma^{jq} + \gamma^{iq} \gamma^{jp}) + \beta (\gamma^{ip} \gamma^{jq} - \gamma^{iq} \gamma^{jp}) \quad (2.119)$$

Dalla richiesta di simmetria di  $\pi^{ij}$  otteniamo  $\Lambda^{ijmn} = \Lambda^{jimn}$  la qual cosa comporta  $\beta = 0$  cioè

$$\Lambda^{ijpq} = \lambda \gamma^{ij} \gamma^{pq} + \mu (\gamma^{ip} \gamma^{jq} + \gamma^{iq} \gamma^{jp}) \quad (2.120)$$

sostituendo in (2.116) abbiamo

$$\pi^{ij} = \lambda \gamma^{ij} \gamma^{pq} \epsilon_{pq} + \mu (\gamma^{ip} \gamma^{jq} + \gamma^{iq} \gamma^{jp}) \epsilon_{pq} \quad (2.121)$$

$$= \frac{1}{2} \lambda \gamma^{ij} \gamma^{pq} \frac{d\gamma_{pq}}{dt} + \mu \gamma^{ip} \gamma^{jq} \frac{d\gamma_{pq}}{dt} \quad (2.122)$$

Trasformando in coordinate curvilinee in moto abbiamo che le componenti di  $d\gamma_{ij}/dt$  nel sistema  $\boldsymbol{\eta}$  sono una derivata convettiva. Ricordiamoci che la derivata intrinseca della metrica è nulla mentre la convettiva è proprio pari al doppio del tensore di deformazione. Otteniamo così la seguente espressione per il tensore degli sforzi viscosi:

$$\begin{aligned} P^{ij} &= \frac{1}{2} \lambda g^{ij} \underbrace{g^{pq} \frac{d_c g_{pq}}{dt}}_{2u_{;m}^m} + \mu g^{ip} g^{jq} \frac{d_c g_{pq}}{dt} \\ &= \lambda g^{ij} u_{;m}^m + \mu g^{ip} g^{jq} e_{pq} \\ &= \lambda g^{ij} u_{;m}^m + 2\mu e^{ij} \end{aligned} \quad (2.123)$$

in cui  $\lambda$  e  $\mu$  possono essere funzioni dello stato termodinamico locale. Notare che gli sforzi non dipendono dalla velocità del sistema di coordinate  $\boldsymbol{\eta}$  (*la risposta del materiale assume la stessa forma per ogni osservatore*). La divergenza del tensore degli sforzi è<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} T_{;j}^{ij} &= (-p_{;j} + \lambda u_{;m;j}^m) g^{ij} + \mu g^{ip} g^{jq} (u_{p;qj} + u_{q;pj}) \\ &= (-p_{;j} + (\lambda + \mu) u_{;m;j}^m) g^{ij} + \mu g^{jq} u_{;j;q}^i \end{aligned}$$

La forma covariante è

$$T_{i;j}^j = - \underbrace{p_{;i}}_{\nabla p} + (\lambda + \mu) \underbrace{u_{;im}^m}_{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})} + \mu \underbrace{g^{jq} u_{i;jq}}_{\nabla^2 \mathbf{u}}$$

<sup>13</sup>In generale un tensore isotropo è un tensore le cui componenti rispetto ad un sistema di coordinate cartesiano ed ortogonale non cambiano se quest'ultimo viene ruotato. L'unico tensore isotropo del secondo ordine in coordinate cartesiane ed ortogonali è  $\delta_{ij}$ , mentre un generico tensore isotropo del quarto ordine può dipendere da 3 parametri

$$A_{ijklm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{km} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk}) + \beta (\delta_{ik} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jk}) \quad (2.117)$$

Questa espressione si dimostra mettendo assieme tutte le condizioni che saltano fuori dall'invarianza rispetto alla rotazione di  $A_{ijklm}$ , la qual cosa significa considerare le condizioni

$$A_{ijklm} = \frac{\partial y^l}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} \frac{\partial y^r}{\partial x^k} \frac{\partial y^s}{\partial x^m} A_{lqrs} \quad (2.118)$$

per rotazioni  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$  intorno ad assi arbitrari. Quando si passa a coordinate generali si sostituisce  $\delta_{ij}$  con  $g_{ij}$ .

<sup>14</sup>Ricordiamo che  $g_{ik;j} = 0$ .

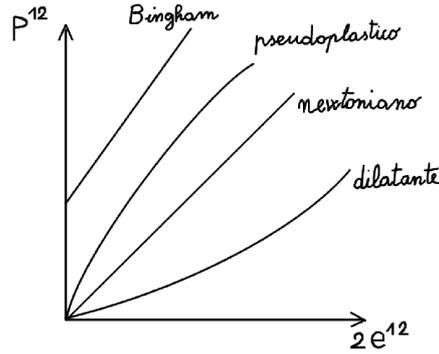


Figura 2.2: Differenti relazioni fra tensione tangenziale viscosa e gradiente di velocità.

### 2.5.3 Altre tipologie di fluidi

Attraverso opportuni viscosimetri (piani o cilindrici) possiamo misurare lo sforzo tangenziale  $P^{12}$  e relazionarlo al gradiente di velocità nel fluido. Si dicono fluidi *tixotropici* quei fluidi per cui lo sforzo tangenziale si riduce nel tempo in condizioni stazionarie di prova, cioè il fluido si indebolisce. Il meccanismo per cui ciò avviene va ricercato a livello molecolare. Analogamente si dicono *reopettici* quei fluidi per cui lo sforzo tangenziale aumenta. Di norma lo sforzo tangenziale rimane inalterato nel tempo se le condizioni di misura sono stazionarie. In questo caso possiamo avere differenti tipologie di comportamento. Fra le più importanti ricordiamo quelle di fluido *pseudoplastico*, *dilatante* e di *Bingham*. Il fluido di Bingham manifesta sforzi tangenziali non nulli anche in condizioni di quiete, cioè esso è in grado di trasmettere delle coppie e delle torsioni in condizioni di quiete.

## 2.6 Le equazioni di Navier-Stokes

In questa sezione ricaviamo la forma delle equazioni di Navier-Stokes<sup>15</sup> per un flusso viscoso e comprimibile in coordinate curvilinee in moto. Parleremo sia di coordinate che di *osservatore* in moto, il che equivarrà a ricavare le equazioni di un flusso viscoso osservato da un secondo *flusso osservatore*, eventualmente anch'esso viscoso.

### 2.6.1 L'ipotesi di Stokes

Consideriamo la forma controvariante del tensore degli sforzi per il fluido Newtoniano in coordinate generali  $\eta$

$$T^{ij} = -pg^{ij} + \lambda g^{ij} u_{;m}^m + 2\mu e^{ij} \quad (2.124)$$

Se il fluido è a riposo la traccia di questo tensore è pari a tre volte la pressione *termodinamica*  $p$ . In generale la traccia del tensore (2.124) si ottiene abbassando un indice e poi contraendo

$$T_j^i = -p\delta_j^i + \lambda\delta_j^i u_{;m}^m + 2\mu e_j^j \quad (2.125)$$

Da quest'ultima espressione otteniamo che

$$T_i^i = -3p + (3\lambda + 2\mu) u_{;i}^i \quad (2.126)$$

<sup>15</sup>Le equazioni del fluido Newtoniano incomprimibile sono state determinate da Navier nel 1827. Successivamente Stokes nel 1845 le estese al caso di fluido Newtoniano comprimibile.

Chiamiamo  $\bar{p} = -T_i^i/3$  il valore medio aritmetico degli sforzi principali. Abbiamo

$$\bar{p} - p = - \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) u_{;i}^i \quad (2.127)$$

$$= \underbrace{\left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right)}_{\text{bulk viscosity}} \frac{1}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta t} \quad (2.128)$$

$p$  è la pressione termodinamica ed essa è nota dall'equazione di stato del fluido. Se riusciamo a misurare lo sforzo principale medio  $\bar{p}$  che corrisponde ad una variazione intrinseca di  $\rho$  possiamo calcolarci quanto vale la viscosità di bulk<sup>16</sup> attraverso la

$$\left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) = \rho \frac{\bar{p} - p}{\delta \rho / \delta t} \quad (2.129)$$

Tuttavia per apprezzare una differenza fra  $\bar{p}$  e  $p$  occorrerebbe usare onde di densità impulsive e di ampiezza relativamente elevata, tanto elevata da mettere in dubbio il legame lineare fra sforzi e velocità di deformazione postulato. Pertanto viene solitamente assunto che  $\bar{p} = p$  (*ipotesi di Stokes*) cioè che

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 \quad (2.130)$$

Questo risultato può essere ricavato impiegando la teoria cinetica dei gas ed ha fondamenti teorici rigorosi per gas monoatomici. Per gas poliatomici e liquidi questo risultato è di per certo non corretto, cioè l'ipotesi di Stokes non è verificata. Tuttavia il coefficiente  $\lambda$  è del tutto inessenziale se si trattano fluidi in moto approssimativamente isocoro oppure fluidi strutturalmente incomprimibili. L'importanza della seconda viscosità dinamica  $\lambda$  è illustrata da Landau-Lifshitz (Fluid Mechanics) nel contesto della propagazione sonora.

## 2.6.2 Equazioni di Navier-Stokes

Se riteniamo valida l'ipotesi di Stokes secondo cui la pressione termodinamica  $p$  coincide con lo sforzo medio  $-T_i^i/3$  abbiamo

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (2.131)$$

Con questa posizione le equazioni di Navier-Stokes assumono la forma controvariante

$$\boxed{\rho \frac{\delta u^i}{\delta t} = \rho f^i - p_{;j} g^{ij} + \frac{1}{3} \mu u_{;mj}^m g^{ij} + \mu g^{jm} u_{;jm}^i} \quad (2.132)$$

ove

$$\frac{\delta u^i}{dt} = \frac{\partial u^i}{\partial t} + u_{;j}^i (u^j - U^j) + U_{;k}^i u^j \quad (2.133)$$

Le componenti fisiche di queste equazioni si ottengono moltiplicando la forma controvariante per  $\sqrt{g_{ii}}$ , ed esprimendo le componenti tensoriali della velocità e della pressione in termini di componenti fisiche. Un sistema di coordinate speciale è il sistema di coordinate Lagrangiano. Esso è un funzionale della soluzione delle equazioni. In altre parole tutte le proprietà metriche del sistema di coordinate dipendono dalla soluzione dell'equazione. Pertanto risolvere le equazioni di Navier-Stokes in coordinate Lagrangiane è molto più complicato di quanto non sia in coordinate fisse.

<sup>16</sup>Di norma  $\mu$  viene detta viscosità dinamica mentre  $\lambda$  si definisce seconda viscosità dinamica.

## Espressione delle equazioni di Navier in coordinate cilindriche

In questa sezione ricaviamo le equazioni di Navier-Stokes in coordinate cilindriche per un fluido incomprimibile in assenza di forze specifiche di massa. La metrica del sistema di coordinate cilindrico è  $g_{rr} = 1$ ,  $g_{\phi\phi} = r^2$ ,  $g_{zz} = 1$ . I coefficienti della connessione affine si calcolano ovviamente utilizzando la metrica. A questo proposito notiamo che l'unica relazione metrica che abbiamo è fra  $\phi$  ed  $r$  in  $g_{\phi\phi}$ ; dunque gli unici coefficienti della connessione affine che possono essere non nulli sono quelli che hanno a che fare unicamente con  $\phi$  ed  $r$  cioè:  $\Gamma_{r\phi}^r$ ,  $\Gamma_{\phi\phi}^r$ ,  $\Gamma_{r\phi}^\phi$  e  $\Gamma_{rr}^\phi$ . Inoltre  $\phi$  deve comparire almeno 2 volte per identificare  $g_{\phi\phi}$ . È facile calcolare che

$$\Gamma_{r\phi}^r = \frac{1}{2}g^{rr} \left( \frac{\partial g_{r\phi}}{\partial r} + \frac{\partial g_{rr}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{r\phi}}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.134)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{1}{2}g^{rr} \left( \frac{2\partial g_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} \right) = -r \quad (2.135)$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} \left( \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} + \frac{\partial g_{\phi r}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{r\phi}}{\partial \phi} \right) = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r} \quad (2.136)$$

$$\Gamma_{rr}^\phi = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} \left( \frac{2\partial g_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial \phi} \right) = 0 \quad (2.137)$$

Per un generico vettore controvariante  $A^i$  abbiamo che le derivate covarianti delle componenti coincidono con derivate ordinarie, tranne che per le componenti

$$A^r_{;\phi} = \frac{\partial A^r}{\partial \phi} + \Gamma_{\phi\phi}^r A^\phi = \frac{\partial A^r}{\partial \phi} - r A^\phi \quad (2.138)$$

$$A^\phi_{;r} = \frac{\partial A^\phi}{\partial r} + \Gamma_{r\phi}^\phi A^\phi = \frac{\partial A^\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} A^\phi \quad (2.139)$$

$$A^\phi_{;\phi} = \frac{\partial A^\phi}{\partial \phi} + \Gamma_{\phi r}^\phi A^r = \frac{\partial A^\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r} A^r \quad (2.140)$$

Pertanto le componenti controvarianti della derivata intrinseca sono

$$\begin{aligned} \frac{\delta u^r}{\delta t} &= \frac{\partial u^r}{\partial t} + u^r u^r_{;r} + u^\phi u^r_{;\phi} + u^z u^r_{;z} \\ &= \frac{\partial u^r}{\partial t} + u^r \frac{\partial u^r}{\partial r} + u^\phi \left( \frac{\partial u^r}{\partial \phi} - r u^\phi \right) + u^z \frac{\partial u^r}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.141)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta u^\phi}{\delta t} &= \frac{\partial u^\phi}{\partial t} + u^r u^\phi_{;r} + u^\phi u^\phi_{;\phi} + u^z u^\phi_{;z} \\ &= \frac{\partial u^\phi}{\partial t} + u^r \left( \frac{\partial u^\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} u^\phi \right) + u^\phi \left( \frac{\partial u^\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r} u^r \right) + u^z \frac{\partial u^\phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.142)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta u^z}{\delta t} &= \frac{\partial u^z}{\partial t} + u^r u^z_{;r} + u^\phi u^z_{;\phi} + u^z u^z_{;z} \\ &= \frac{\partial u^z}{\partial t} + u^r \frac{\partial u^z}{\partial r} + u^\phi \frac{\partial u^z}{\partial \phi} + u^z \frac{\partial u^z}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.143)$$

Per ottenere le componenti fisiche della derivata intrinseca bisogna eseguire due operazioni

1. moltiplicare la forma controvariante per il fattore di scala  $\sqrt{g_{ii}}$

2. sostituire tutte le componenti tensoriali dei vettori con quelle fisiche.

Se indichiamo con  $v_r = u^r$ ,  $v_\phi = ru^\phi$  ed  $v_z = u^z$  le componenti fisiche della velocità allora abbiamo le seguenti componenti fisiche della derivata intrinseca

$$\frac{\delta v_r}{\delta t} = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi \right) + v_r \frac{\partial v_r}{\partial z} \quad (2.144)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta v_\phi}{\delta t} &= r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \left( -\frac{1}{r^2} v_\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} v_\phi \right) + \frac{1}{r} v_\phi \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r} v_r \right) + v_z \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.145)$$

$$\frac{\delta v_z}{\delta t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.146)$$

Valutiamo ora le componenti del gradiente di pressione e del Laplaciano della velocità. Le componenti tensoriali controvarianti del gradiente sono

$$g^{rr} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (2.147)$$

$$g^{\phi\phi} \frac{\partial p}{\partial \phi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial p}{\partial \phi} \quad (2.148)$$

$$g^{\phi\phi} \frac{\partial p}{\partial \phi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial p}{\partial \phi} \quad (2.149)$$

mentre le componenti fisiche si ottengono moltiplicando per  $\sqrt{g_{ii}}$  quelle controvarianti

$$[\nabla p]_r = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (2.150)$$

$$[\nabla p]_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} \quad (2.151)$$

$$[\nabla p]_z = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.152)$$

Il laplaciano della velocità in componenti tensoriali è, per definizione

$$\nabla u^i = g^{lm} u^i_{;lm} = g^{rr} u^i_{;rr} + g^{\phi\phi} u^i_{;\phi\phi} + g^{zz} u^i_{;zz} \quad (2.153)$$

$$= u^i_{;rr} + \frac{1}{r^2} u^i_{;\phi\phi} + u^i_{;zz} \quad (2.154)$$

In generale abbiamo

$$u^i_{;rr} = \frac{\partial u^i_{;r}}{\partial r} + \Gamma^i_{pr} u^p_{;r} - \Gamma^p_{rr} u^i_{;p} \quad (2.155)$$

$$u^i_{;\phi\phi} = \frac{\partial u^i_{;\phi}}{\partial \phi} + \Gamma^i_{p\phi} u^p_{;\phi} - \Gamma^p_{\phi\phi} u^i_{;p} \quad (2.156)$$

$$u^i_{;zz} = \frac{\partial u^i_{;z}}{\partial z} + \Gamma^i_{pz} u^p_{;\phi} - \Gamma^p_{zz} u^i_{;p} \quad (2.157)$$

Ora possiamo esplicitare le 3 componenti tensoriali  $\nabla^2 u^r$

$$u^r_{;rr} = \frac{\partial^2 u^r}{\partial r^2} \quad (2.158)$$

$$\begin{aligned} u^r_{;\phi\phi} &= \frac{\partial u^r_{;\phi}}{\partial \phi} + \Gamma^r_{\phi\phi} (u^{\phi}_{;\phi} - u^r_{;r}) \\ &= \frac{\partial^2 u^r}{\partial \phi^2} - 2r \frac{\partial u^r}{\partial \phi} - u^r + r \frac{\partial u^r}{\partial r} \end{aligned} \quad (2.159)$$

$$u^r_{;zz} = \frac{\partial^2 u^r}{\partial z^2} \quad (2.160)$$

ottenendo

$$\nabla^2 u^r = \frac{\partial^2 u^r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial u^r}{\partial \phi} - \frac{u^r}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u^r}{\partial z^2} \quad (2.161)$$

Ora sostituiamo le componenti tensoriali con le componenti fisiche e moltiplichiamo per  $\sqrt{g_{rr}} = 1$  per ottenere la prima componente fisica del laplaciano:

$$\nabla^2 v_r = \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \quad (2.162)$$

Procediamo in modo analogo per le altre componenti

$$\begin{aligned} u^{\phi}_{;rr} &= \frac{\partial u^{\phi}_{;r}}{\partial r} + \Gamma^{\phi}_{\phi r} u^{\phi}_{;r} \\ &= \frac{\partial^2 u^{\phi}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^{\phi}}{\partial r} \end{aligned} \quad (2.163)$$

$$\begin{aligned} u^{\phi}_{;\phi\phi} &= \frac{\partial u^{\phi}_{;\phi}}{\partial \phi} + \Gamma^{\phi}_{r\phi} u^r_{;\phi} - \Gamma^r_{\phi\phi} u^{\phi}_{;r} \\ &= \frac{\partial^2 u^{\phi}}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^r}{\partial \phi} + r \frac{\partial u^{\phi}}{\partial r} \end{aligned} \quad (2.164)$$

$$u^{\phi}_{;zz} = \frac{\partial^2 u^{\phi}}{\partial z^2} \quad (2.165)$$

ottenendo le seguenti componenti tensoriali

$$\nabla^2 u^{\phi} = \frac{\partial^2 u^{\phi}}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial u^{\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^{\phi}}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial u^r}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 u^{\phi}}{\partial z^2} \quad (2.166)$$

Le componenti fisiche si ottengono al solito moltiplicando per  $\sqrt{g_{\phi\phi}} = r$  e sostituendo alle componenti tensoriali dei vettori le rispettive componenti fisiche. Il calcolo è abbastanza fastidioso<sup>17</sup> e fornisce

$$\nabla^2 v_\phi = \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2} \quad (2.168)$$

<sup>17</sup>Ad esempio abbiamo il termine

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^{\phi}}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} v_\phi \right) \\ &= -\frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r^3} v_\phi \end{aligned} \quad (2.167)$$

Infine, per la componente  $z$

$$u_{;rr}^z = \frac{\partial^2 u^z}{\partial r^2} \quad (2.169)$$

$$\begin{aligned} u_{;\phi\phi}^z &= \frac{\partial u_{;\phi}^z}{\partial \phi} - \Gamma_{\phi\phi}^r u_{;r}^z \\ &= \frac{\partial^2 u^z}{\partial \phi^2} + r \frac{\partial u^z}{\partial r} \end{aligned} \quad (2.170)$$

$$u_{;zz}^z = \frac{\partial^2 u^z}{\partial z^2} \quad (2.171)$$

otteniamo la seguente componente fisica del laplaciano

$$\nabla^2 v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \quad (2.172)$$

Le equazioni di Navier-Stokes in coordinate cilindriche assumono la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi \right) + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \\ \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.173)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \\ \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (2.174)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.175)$$

in cui, ovviamente, tutte le quantità sono già state adimensionalizzate.

### 2.6.3 Adimensionalizzazione delle equazioni

L'adimensionalizzazione delle equazioni di Navier-Stokes è abbastanza semplice se esse sono scritte in notazione vettoriale/operatoriale. Chiaramente se si esplicitano le componenti *fisiche* in un certo sistema di coordinate l'equazione può assumere una forma molto complicata. Tuttavia, trattandosi appunto di componenti fisiche risulta che esse sono *dimensionalmente omogenee*. Pertanto indipendentemente dal grado di complicazione introdotto dalla rappresentazione in coordinate arbitrarie è comunque possibile selezionare una base dimensionale per adimensionalizzare il problema. Perciò prima si scrive l'equazione in componenti fisiche e poi la si adimensionalizza. Talvolta le variabili di adimensionalizzazione sono dei funzionali della soluzione. Ciò accade, ad esempio, quando si adimensionalizza un profilo di velocità in un tubo cilindrico utilizzando la velocità media.

## 2.6.4 Equazione di Fourier per un fluido Newtoniano conduttivo ed incompressibile

Specializziamo l'equazione di Fourier (2.79) al caso di un flusso Newtoniano ed incompressibile. La dissipazione viscosa assume la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= e_{ij}P^{ij} \\ &= e_{ij}(\lambda g^{ij}e_m^m + 2\mu e^{ij}) \\ &= 2\mu e^{ij}e_{ij}\end{aligned}\tag{2.176}$$

essendo il fluido incompressibile ( $e_m^m = u_{;m}^m = 0$ )<sup>18</sup>. Se il fluido è Fourieriano avremo la seguente densità di flusso termico conduttivo

$$q^i = -kg^{ij}T_{;j}\tag{2.178}$$

Pertanto otteniamo la seguente forma per l'equazione di Fourier

$$\boxed{\rho c_p \frac{\delta T}{\delta t} = 2\mu e^{ij}e_{ij} + kg^{ij}T_{;ij}}\tag{2.179}$$

avendo posto  $\beta = 0$ , vista l'incompressibilità.

### Espressione della dissipazione viscosa in coordinate cartesiane ortogonali

In coordinate cartesiane ortogonali abbiamo la seguente espressione per la dissipazione viscosa

$$\begin{aligned}2\mu e_{ij}e^{ij} &= \sum_{i,j=1}^3 2\mu \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right)^2 \\ &= \frac{\mu}{2} \left[ \left( 2 \frac{\partial u^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left( 2 \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \right)^2 + \left( 2 \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \right)^2 \right] + \frac{\mu}{2} \left[ 2 \left( \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^1} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. 2 \left( \frac{\partial u^1}{\partial x^3} + \frac{\partial u^3}{\partial x^1} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u^2}{\partial x^3} + \frac{\partial u^3}{\partial x^2} \right)^2 \right]\end{aligned}\tag{2.180}$$

cioè

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \right)^2 \right] + \mu \left[ \left( \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^1} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{\partial u^1}{\partial x^3} + \frac{\partial u^3}{\partial x^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^2}{\partial x^3} + \frac{\partial u^3}{\partial x^2} \right)^2 \right]\end{aligned}\tag{2.181}$$

<sup>18</sup>Nel caso di fluido Newtoniano comprimibile, se riteniamo valida l'ipotesi di Stokes abbiamo

$$\mathcal{D} = 2\mu \left( -\frac{1}{3}(e_m^m)^2 + e_{ij}e^{ij} \right)\tag{2.177}$$

### 2.6.5 Il secondo principio della termodinamica per un fluido Newtoniano

L'equazione di bilancio di entropia, unita al secondo principio della termodinamica in assenza di calore generato fornisce la condizione

$$q^j T_{;j} \leq T \mathcal{D} \quad (2.182)$$

Se non vi sono fenomeni conduttivi abbiamo ovviamente

$$\mathcal{D} \geq 0 \quad (2.183)$$

Questa condizione, sostituita nell'equazione di Fourier ci dice che la dissipazione viscosa viene convertita in incremento di temperatura, cioè  $\mathcal{D}$  è un termine *sorgente*. Se il fluido è conduttivo secondo Fourier allora il secondo principio di dice che

$$-k g^{ij} T_{;i} T_{;j} \leq 2\mu T \left[ e^{ij} e_{ij} - \frac{1}{3} (u_{;m}^m)^2 \right] \quad (2.184)$$

Poiché deve essere  $k \geq 0$  (in assenza di moto  $\mathcal{D} = 0$  ed abbiamo conduzione pura, per la quale il secondo principio suggerisce appunto  $k > 0$ ), ed inoltre sappiamo che  $e^{ij} e_{ij} > 0$  dalla precedente segue che

$$(u_{;m}^m)^2 \leq \frac{3k |\nabla T|^2}{2\mu T} + 3e^{ij} e_{ij} \quad (2.185)$$

Quest'ultima relazione stabilisce, ad esempio, un limite superiore alla variazione di densità

$$\left| \frac{\delta \rho}{\delta t} \right| \leq \sqrt{3} \rho \sqrt{\frac{k |\nabla T|^2}{2\mu T} + e^{ij} e_{ij}} \quad (2.186)$$

## 2.7 Equazioni integrali

Consideriamo il moto di un fluido relativamente ad un sistema di coordinate arbitrario ed isoliamo un un *volume di controllo*  $V$  fisso relativamente a tale sistema di coordinate. La superficie del volume di controllo sarà continuamente attraversata da particelle di fluido e vi saranno una o più porzioni di superficie  $S_i$  in cui le particelle entrano ed una o più porzioni di superficie  $S_u$  in cui esse escono. Scopo di questa sezione è quello di ottenere delle leggi semplici per quantificare i fenomeni energetici e fluidodinamici che avvengono nel volume di controllo.

### 2.7.1 Conservazione della massa

Consideriamo un volume solidale ad un sistema di coordinate  $\eta$  eventualmente in moto, relativamente al quale descriviamo il moto di un fluido<sup>19</sup>. Consideriamo l'equazione di bilancio locale della massa

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u^m - U^m) \rho_{;m} = -\rho u_{;m}^m \quad (2.187)$$

<sup>19</sup>Ad esempio potremmo avere un volume di controllo che identifica le sezioni di passaggio fra le pale di una turbina in rotazione.

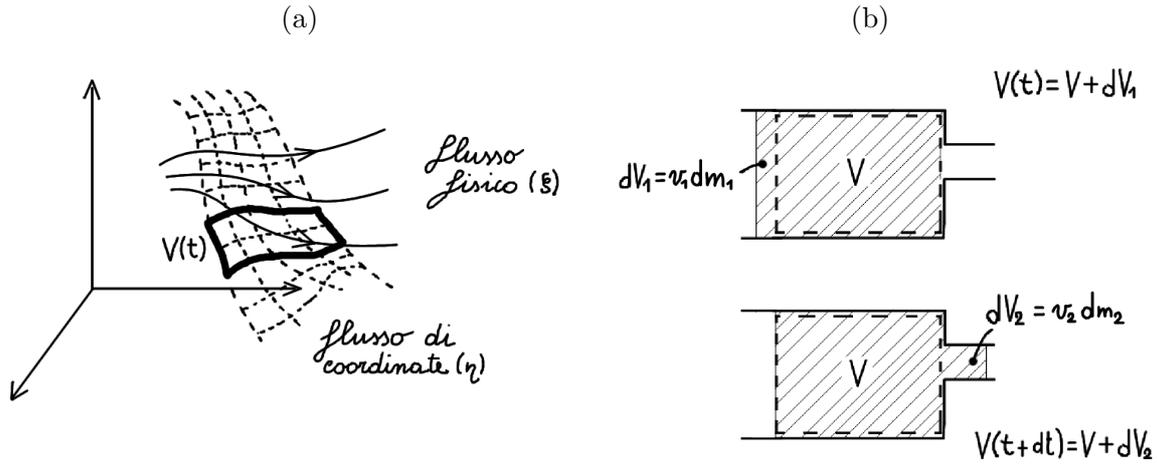


Figura 2.3: (a) Flusso fisico, flusso di coordinate e volume di controllo solidale al flusso di coordinate. (b) Volume di controllo attraversato da un volume di fluido in moto. In figura sono illustrati due istanti di tempo infinitamente vicini.

ed integriamo sul volume  $V$  che, in coordinate  $\eta$ , appare fisso<sup>20</sup>. Otteniamo

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V (u^m \rho)_{;m} dV = \int_V \rho_{;m} U^m dV \quad (2.188)$$

in cui  $U^m$  sono le componenti nel sistema  $\eta$  della velocità del sistema di coordinate  $\eta$ . Se tale velocità è nulla ( $U^m = 0$ ) oppure se il sistema di coordinate di  $\eta$  è in moto *incomprimibile* (ad esempio un sistema in rotazione rigida - pale di una girante di una turbomacchina), cioè  $U^m_{;m} = 0$ , allora dalla (2.188) deduciamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} &= - \int_S \rho (u^m - U^m) n_m dS \\ &= \int_{S_i} \rho u_R^m n_m dS - \int_{S_e} \rho u_R^m n_m dS \end{aligned} \quad (2.189)$$

dalla quale

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial t} = \dot{m}_i - \dot{m}_e} \quad (2.190)$$

in cui la portata massica  $\dot{m}$  è da valutarsi nel caso generale utilizzando la velocità relativa  $u_R^m = u^m - U^m$  del fluido relativamente a  $\eta$ . L'ipotesi di incomprimibilità del flusso di coordinate  $\eta$  implica che la misura del volume  $V$  è una costante se essa viene valutata da coordinate  $x$ . Infatti in tali circostanze la dilatazione o la contrazione del volume è nulla in ogni sistema di coordinate.

## 2.7.2 Conservazione dell'energia totale

Con riferimento alla figura 2.3(b), consideriamo un volume di controllo fisso  $V$  attraversato da un volume di fluido  $V(t)$  in moto. Fra due istanti di tempo infinitamente vicini possiamo

<sup>20</sup>Se osserviamo tale volume da coordinate cartesiane ed ortogonali  $x$  fisse vediamo il suddetto volume in moto.

scrivere che la variazione di energia totale del volume di fluido in moto (sistema chiuso) è

$$dE = \delta Q - \delta L \quad (2.191)$$

ove

$$E = \int_{V(t)} \rho \underbrace{\left( e + \frac{u^2}{2} + gz \right)}_{\mathcal{E}} dV \quad (2.192)$$

è l'energia totale del fluido contenuto in  $V(t)$ , mentre

$$\mathcal{E} = e + \frac{u^2}{2} + gz \quad (2.193)$$

è l'energia specifica totale di un elemento fluido. Fra due istanti di tempo infinitamente vicini avremo che il lavoro  $\delta L$  scambiato dal fluido si compone di due termini: quello scambiato all'interno del volume fisso  $V$  con eventuali macchine (lavoro utile  $\delta L_u$ ) e quello di "immissione" ed "estrazione" del fluido nel volume fisso dovuti agli sforzi di pressione  $dL_p = p_2 dV_2 - p_1 dV_1$ , in cui  $dV_2$  è il volume di fluido uscito all'istante  $t + dt$  mentre  $dV_1$  è il volume di fluido in ingresso all'istante  $t$  (vd. figura 2.3(b)). Pertanto

$$dE = \delta Q - \delta L_u - p_2 v_2 dm_2 + p_1 v_1 dm_1 \quad (2.194)$$

Valutiamo quanto vale la variazione nel tempo dell'energia totale  $\mathcal{E}$  del fluido. All'istante  $t$  e all'istante  $t + dt$  abbiamo che

$$E(t) = \int_{V(t)} \rho \mathcal{E} dV \simeq \left( \int_V \rho \mathcal{E} dV \right)_t + \mathcal{E}_1 dm_1 \quad (2.195)$$

$$E(t + dt) = \int_{V(t+dt)} \rho \mathcal{E} dV \simeq \left( \int_V \rho \mathcal{E} dV \right)_{t+dt} + \mathcal{E}_2 dm_2 \quad (2.196)$$

Pertanto

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathcal{E} dV + \mathcal{E}_2 \dot{m}_2 - \mathcal{E}_1 \dot{m}_1 \quad (2.197)$$

dalla quale

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathcal{E} dV + (\mathcal{E}_2 + p_2 v_2) \dot{m}_2 - (\mathcal{E}_1 + p_1 v_1) \dot{m}_1 = \dot{Q} - \dot{L}_u} \quad (2.198)$$

Esplicitando l'energia totale del fluido nella sezione di ingresso e di uscita abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathcal{E} dV + \left( \frac{u_2^2}{2} + h_2 + gz_2 \right) \dot{m}_2 - \left( \frac{u_1^2}{2} + h_1 + gz_1 \right) \dot{m}_1 = \dot{Q} - \dot{L}_u \quad (2.199)$$

Notiamo che la quantità  $u_2^2/2 + h_2 + gz_2$  ha il significato di energia per unità di massa di fluido che trasita in una certa sezione. Se il moto è stazionario abbiamo  $\dot{m}_2 = \dot{m}_1$ . Dunque

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + h_2 - h_1 + g(z_2 - z_1) = \dot{q} - \dot{l} \quad (2.200)$$

ove  $\dot{q} = Q/\dot{m}$  e  $\dot{l} = L_u/\dot{m}$ .

### Dimostrazione alternativa

È possibile determinare il bilancio di energia del sistema aperto partendo dalla forma differenziale che stabilisce la conservazione dell'energia totale. Questa dimostrazione si basa sull'ipotesi di equilibrio termodinamico locale, dunque ha fondamenti più rigorosi di quella appena illustrata. Eseguiamo questo conto per un fluido perfetto<sup>21</sup>. Utilizzando coordinate cartesiane ortogonali fisse abbiamo l'equazione

$$\rho \frac{\delta \mathfrak{E}}{\delta t} = \rho f^i u_i + (T^{ij} u_i)_{,j} - q^i_{,i} \quad (2.201)$$

Sviluppiamo la derivata intrinseca

$$\begin{aligned} \rho \frac{\delta \mathfrak{E}}{\delta t} &= \rho \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \rho \mathfrak{E}_{,k} u^k \\ &= \rho \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + (\rho u^k \mathfrak{E})_{,k} - \mathfrak{E} (\rho u^k)_{,k} \\ &= \rho \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \mathfrak{E} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho u^k \mathfrak{E})_{,k} \end{aligned} \quad (2.202)$$

ove abbiamo utilizzato anche l'equazione di continuità. Ora consideriamo il membro di destra di (2.201)

$$\begin{aligned} \rho f^i u_i + (T^{ij} u_i)_{,j} &= -(gz)_{,i} \rho u^i - (\rho u_i p v)_{,i} \\ &= -(gz \rho u^i)_{,i} - gz \frac{\partial \rho}{\partial t} - (\rho u^i p v)_{,i} \end{aligned} \quad (2.203)$$

Otteniamo infine

$$\rho \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + (\mathfrak{E} + gz) \frac{\partial \rho}{\partial t} + [\rho u^i (\mathfrak{E} + p v + gz)]_{,i} = -q^i_{,i} \quad (2.204)$$

Definiamo  $\mathcal{E} = \mathfrak{E} + gz$  e notiamo che  $\partial \mathcal{E} / \partial t = \partial \mathfrak{E} / \partial t$ . Pertanto

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathcal{E}) + [\rho u^i (\mathcal{E} + p v)]_{,i} = -q^i_{,i}} \quad (2.205)$$

Ora integriamo su un volume di controllo *fisso* avente un'unica sezione di ingresso ed uscita ed assumiamo che tutte le proprietà siano uniformi nelle suddette sezioni. Troviamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \mathcal{E} dV + \underbrace{\rho_2 u_2 S_2}_{\dot{m}_2} (\mathcal{E}_2 + p_2 v_2) - \underbrace{\rho_1 u_1 S_1}_{\dot{m}_1} (\mathcal{E}_1 + p_1 v_1) = \dot{Q} \quad (2.206)$$

che è un caso particolare l'equazione del sistema aperto. Nel caso vi sia una macchina in grado di scambiare lavoro utile con il fluido all'interno del volume di controllo avremo  $\dot{Q} - \dot{L}_u$  al membro di destra. Evidentemente se assumiamo che gli effetti della viscosità possano essere quantificati esclusivamente con una generazione locale di *calore*<sup>22</sup> allora la precedente equazione vale nel caso generale di fluido viscoso che attraversa un volume di controllo.

<sup>21</sup>La trattazione teorica del caso in cui vi sia viscosità è molto complessa. Infatti occorre conoscere in che modo il lavoro degli sforzi tangenziali influenza la temperatura, la densità e le altre variabili termodinamiche del sistema.

<sup>22</sup>In effetti il lavoro degli sforzi viscosi  $(P^{ij} u_i)_{,j} = P^i_{;j} u_i + \mathcal{D}$  ha le dimensioni di una potenza per unità di volume e l'equazione di Fourier mostra che i suoi effetti sull'aumento di temperatura sono equiparati a  $q_g$  (generazione di potenza per unità di volume).

### 2.7.3 Principio di conservazione dell'energia meccanica

Consideriamo un sistema di coordinate curvilinee fisse ed un volume  $V_0$  anch'esso fisso rispetto a tale sistema di coordinate.

**Teoremi di Bernoulli** I teoremi di Bernoulli stabiliscono, sotto certe ipotesi, che esiste una quantità esprimibile come gradiente di uno scalare che si mantiene ortogonale sia alle linee di corrente che a quelle vorticoso. Poiché il gradiente di uno scalare è ortogonale alle superfici di livello dello scalare stesso, ciò significa che le linee di corrente e le linee vorticoso sono contenute nella superficie in cui tale scalare è costante. Proiettiamo l'equazione di Cauchy nella direzione della velocità del fluido. Abbiamo visto che

$$\frac{1}{2}\rho\frac{\delta u^2}{\delta t} = \rho f^i u_i - p_{,k} g^{ki} u_i + P_{;j}^{ij} u_i \quad (2.207)$$

In condizioni stazionarie, se consideriamo coordinate cartesiane ortogonali ed indichiamo con  $gz$  il potenziale delle forze di massa ( $z$  asse verticale ascendente) abbiamo

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{1}{2} u^2 + gz \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_i^j}{\partial x^j} \right] u^i = 0 \quad (2.208)$$

Ora moltiplichiamo la precedente relazione per  $dt$  e ricordiamo che  $d\hat{x}^i(\boldsymbol{\xi}, t) = u^i dt$  rappresenta un tratto infinitesimo di traiettoria della particella  $\boldsymbol{\xi}$  in coordinate  $\boldsymbol{x}$ . Pertanto la relazione (2.208) ci dice che in condizioni stazionarie il vettore

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{1}{2} u^2 + gz \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_i^j}{\partial x^j} \quad (2.209)$$

è sempre ortogonale alle traiettorie delle particelle  $\boldsymbol{\xi}$ . In condizioni stazionarie inoltre le traiettorie e le linee di corrente coincidono. Se le dissipazioni viscoso sono assenti otteniamo la condizione

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{1}{2} u^2 + gz \right) d\hat{x}^i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} d\hat{x}^i = 0 \quad (2.210)$$

in cui abbiamo indicato con  $d\hat{x}^i$  il differenziale lungo la traiettoria (o lungo le linee di corrente) delle particelle<sup>23</sup>. Se integriamo (2.210) lungo una traiettoria ed assumiamo che il fluido sia barotropico e le forze di massa siano quelle gravitazionali<sup>24</sup> otteniamo

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 \frac{dp}{\rho(p)} = 0 \quad (2.211)$$

Se consideriamo un volume di controllo avente un solo ingresso ed una sola uscita possiamo ovviamente mediare le varie quantità sulle sezioni, il che significa mediare la

<sup>23</sup>È possibile mostrare che vale un risultato analogo lungo le linee a vorticità costante. A tal fine è sufficiente proiettare l'equazione da Cauchy lungo  $w^i = \varepsilon^{ijk} \partial u^k / \partial x^j$ .

<sup>24</sup>Un fluido si dice barotropico quando la pressione e la densità del fluido sono direttamente collegate, cioè esiste una  $\hat{\rho}(p)$ . Tale relazione non deve condurre all'erronea conclusione che il moto di un fluido barotropico è isoterma (dato che non compare  $T$  nella relazione  $\hat{\rho}(p)$ ). Infatti, ad esempio, per un gas perfetto che compie una trasformazione isoentropica abbiamo  $p = c\rho^\gamma$  ma il moto è tutt'altro che isoterma.

velocità e la pressione che si ha sulle linee di corrente in ingresso ed in uscita. Nel caso in cui siano presenti dissipazioni di natura viscosa otteniamo analogamente

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i,j}^j}{\partial x^j} d\widehat{x}^i}_{-R} \quad (2.212)$$

Il termine  $R > 0$  è detto *perdita di carico* e fisicamente rappresenta il lavoro forze viscosse nella direzione del moto. È possibile mostrare che il vettore  $P_{i,j}^j$  è diretto dalla parte opposta rispetto a  $d\widehat{x}^i$ . Inoltre, nel caso di un fluido incomprimibile se definiamo il *carico idraulico* totale  $I = u^2/2 + gz + p/\rho$  abbiamo  $I_2 = I_1 - R$ .

Nei calcoli tecnici di fluidodinamica il coefficiente  $R$  viene solitamente espresso in termini di coefficiente di resistenza distribuita  $\lambda$  o perdita fluidodinamica concentrata. L'equazione (2.212) vale anche nel caso in cui si consideri un volume macroscopico, a patto di considerare valori di velocità e pressione mediati sulla superficie di ingresso e di uscita. Il termine  $R$  in questo caso è da intendersi come perdita avvenuta nel volume dato che il suo valore dipende dalle traiettorie seguite dalle particelle  $\xi$  all'interno del volume stesso. Se introduciamo una macchina (turbina, compressore o pompa) nel volume allora occorrerà considerare anche il contributo dell'energia  $l$ , trasferita o prelevata dalla corrente fluida

$$\boxed{\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + R = l} \quad (2.213)$$

#### 2.7.4 Conservazione dell'entropia

In analogia con il bilancio di energia totale scriviamo l'equazione di bilancio di entropia per il sistema aperto

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho s dV = \dot{m}_1 s_1 - \dot{m}_2 s_2 + \frac{Q}{T_0} + S_{\text{irr}} \quad (2.214)$$

in cui  $S_{\text{irr}}$  è la produzione di entropia per unità di tempo mentre  $Q/T_0$  è il flusso di entropia attraverso attraverso il contorno, proveniente da un serbatoio a temperatura  $T_0$ . Per uno stato stazionario

$$s_2 - s_1 = \frac{q}{T_0} + \Delta s_{\text{irr}} \quad (2.215)$$

Da questa abbiamo

$$q = T_0 (s_2 - s_1) - \Delta s_{\text{irr}} \leq T_0 (s_2 - s_1) \quad (2.216)$$

Dal primo principio per il sistema aperto segue che

$$l \leq h_1 - h_2 + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} - T_0 (s_1 - s_2) + g(z_1 - z_2) \quad (2.217)$$

Se trascuriamo l'energia cinetica e la differenza di quota abbiamo che il lavoro massimo è pari

$$l \leq \chi_1 - \chi_2 \quad (2.218)$$

ove

$$\chi = h - T_0 s \quad (2.219)$$

è la *funzione di disponibilità*. Notare la similitudine di questa definizione con l'energia libera di Gibbs.

## Capitolo 3

# Convezione forzata interna

In questo capitolo studiamo alcune soluzioni analitiche di flussi laminari in ambienti confinati. Le ultime due sezioni sono dedicate allo studio macroscopico del flusso all'interno delle condotte. In esse discutiamo il fattore d'attrito e la caduta di pressione per il caso laminare e turbolento.

### 3.1 Soluzioni analitiche

La soluzione analitica (se si riesce a calcolare) di un problema di termofluidodinamica può essere determinata in forma dimensionale oppure direttamente in forma adimensionale, se sono note tutte le condizioni al contorno e le variabili di adimensionalizzazione. Tuttavia, se queste ultime sono dei *funzionali della soluzione* del problema (cosa che capita ad esempio se adimensionalizziamo un campo di velocità utilizzando la velocità media nella sezione) occorre fare un pochino di attenzione a come si trasformano queste condizioni in forma adimensionale.

#### 3.1.1 Convezione forzata laminare fra piani isoterma in moto relativo

Questo tipo di moto fu studiato analiticamente da Couette e rappresenta uno dei modelli più semplici per l'analisi dello scambio termico in condizioni di convezione forzata laminare. Consideriamo lo schema illustrato in figura 3.1 Il fluido è incomprimibile ed il moto (laminare) viene indotto dal trascinamento del piano superiore (assumiamo che non vi sia gradiente di pressione nella direzione del moto). In condizioni stazionarie l'unica componente non nulla della velocità è parallela al piano del moto e dipende unicamente da  $y$ . Le equazioni di Navier Stokes in coordinate cartesiane ed ortogonali si riducono a

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.1)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.2)$$

Il gradiente di pressione è nullo nella direzione  $y$ . Esso è anche nullo nella direzione del moto dato che il flusso è per ipotesi generato dal trascinamento del piano superiore, non

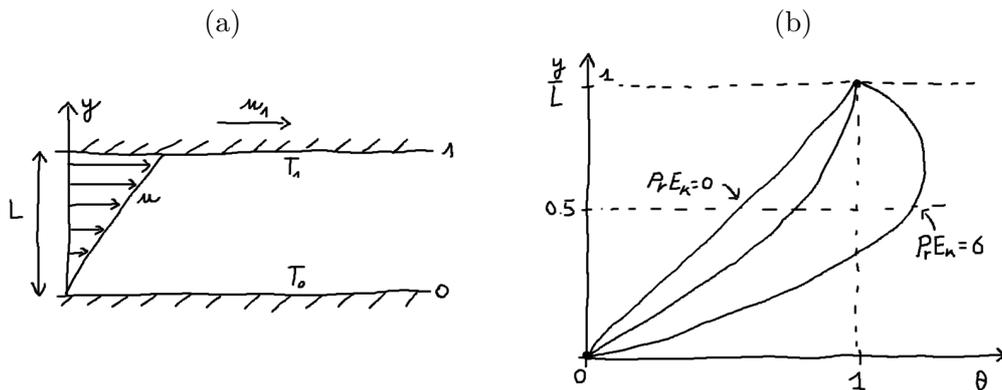


Figura 3.1: Scambio termico nel moto alla Couette: schema del sistema (a) e profili di temperatura adimensionalizzati in funzione della dissipazione viscosa.

da una prevalenza fluidodinamica<sup>1</sup>. Cioè le equazioni di Navier si riducono a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u(y) = u_1 \frac{y}{L} \quad (3.3)$$

In queste condizioni il profilo di velocità è determinato unicamente dagli sforzi tangenziali dovuti alla viscosità. Il moto generato dal trascinamento del piano superiore in una certa direzione può essere anche utilizzato come sistema di misura della viscosità<sup>2</sup>. Infatti se misuriamo la forza necessaria a mantenere in moto il piano superiore abbiamo

$$F = S\tau_{xy} = S\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\text{parete}} = S\mu \frac{u_1}{L} \quad (3.4)$$

**Distribuzione di temperatura** Come noto in condizioni di convezione forzata il problema della determinazione della velocità è indipendente da quello per determinare la temperatura. Si dice anche che la temperatura è un campo scalare trasportato passivamente. Con le approssimazioni bidimensionali fatte e di regime completamente sviluppato abbiamo la seguente di Fourier

$$0 = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \underbrace{\mu \left( \frac{du}{dy} \right)^2}_{\mathcal{D} = 2\mu [e_{12}^2 + e_{21}^2]} \quad (3.5)$$

Sostituendo l'espressione per il gradiente di velocità otteniamo

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{\mu u_1^2}{kL^2} \quad (3.6)$$

<sup>1</sup>Nel caso in cui vi sia un gradiente di pressione nella direzione del moto occorre considerare che per l'equazione di continuità esso risulta essere una costante. Dunque si può comunque calcolare l'integrale generale di (3.1) e specializzarlo per una condizione al contorno di parete mobile

<sup>2</sup>In realtà i viscosimetri che impiegano una misura dello sforzo tangenziale per determinare la viscosità sono costituiti da due cilindri coassiali con una piccola intercapedine fra essi. Dalla misura della coppia necessaria a mantenere in rotazione uniforme il cilindro interno si risale alla viscosità del fluido.

L'integrale generale è

$$T(y) = -\frac{1}{2} \frac{\mu u_1^2}{k L^2} y^2 + A_1 y + A_2 \quad (3.7)$$

Imponendo le condizioni al contorno  $T(0) = T_1$  e  $T(L) = T_2$  si ricava

$$A_2 = T_0 \quad (3.8)$$

$$A_1 = \frac{T_1 - T_0}{L} + \frac{1}{2} \frac{\mu u_1^2}{k L^2} L \quad (3.9)$$

pertanto

$$T(y) - T_0 = \frac{y}{L} \left[ (T_1 - T_0) + \frac{\mu u_1^2}{2k} \left( 1 - \frac{y}{L} \right) \right] \quad (3.10)$$

adimensionalizziamo tale espressione utilizzando la differenza di temperatura  $(T_1 - T_0)$

$$\theta = \frac{y}{L} \left[ 1 + \frac{\mu u_1^2}{2k (T_1 - T_0)} \left( 1 - \frac{y}{L} \right) \right] \quad \theta = \frac{T(y) - T_0}{T_1 - T_0} \quad (3.11)$$

Definiamo anche i seguenti raggruppamenti adimensionali

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k} \quad (\text{numero di Prandtl}) \quad (3.12)$$

$$E_k = \frac{u_1^2}{2c_p (T_1 - T_0)} \quad (\text{numero di Eckert}) \quad (3.13)$$

In figura 3.1(b) disegniamo i profili di temperatura adimensionale in funzione del raggruppamento adimensionale  $PrE_k$ .

$$\boxed{\theta = \frac{y}{L} \left[ 1 + PrE_k \left( 1 - \frac{y}{L} \right) \right]} \quad (3.14)$$

Notiamo che a causa della presenza della dissipazione viscosa il valore di temperatura adimensionale può eccedere 1. Questa situazione si realizza per valori di  $PrE_k$  che eccedono quelli per cui il grafico di  $\theta$  ha tangente verticale in  $y = L$ . Questa condizione corrisponde a  $PrE_k = 1$ . Pertanto se  $PrE_k \geq 1$  vi sono zone in cui  $\theta \geq 1$ . L'andamento è comunque parabolico con un massimo che si sposta verso la parete superiore per  $PrE_k$  crescenti.

### 3.1.2 Moto laminare isoterma di fluido Newtoniano incomprimibile fra due piani paralleli

Con riferimento alla figura 3.2 consideriamo il problema della determinazione del campo di velocità fra due piani paralleli indefiniti. Adimensionalizziamo le equazioni del moto impiegando il semispessore dello strato piano  $Y_0$  ed una velocità di riferimento, ad esempio la velocità media in una qualunque sezione<sup>3</sup>.

La geometria è tale da garantire che l'unica componente non nulla della velocità sia quella lungo  $x$ , che indichiamo con  $u(x, y, z)$ . Poiché  $A \gg 2Y_0$  riteniamo che la velocità sia la stessa in tutti i piani a  $z$  costante. Pertanto  $u$  dipende solo da  $(x, y)$ . Inoltre dall'equazione di continuità abbiamo subito che

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.15)$$

<sup>3</sup>Alternativamente possiamo assegnare una portata volumetrica oppure una portata in massa e da esse risalire alla velocità media.

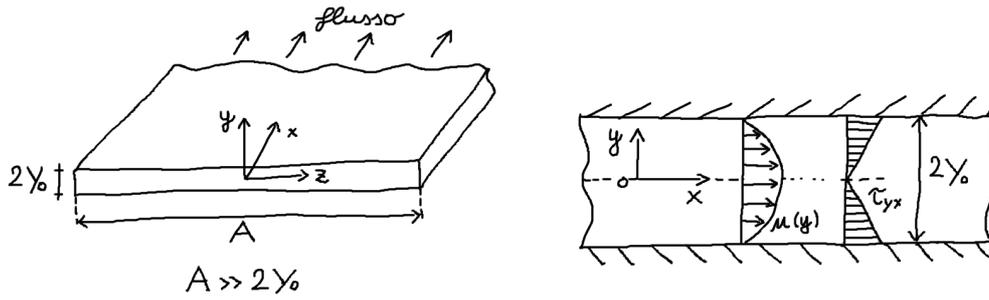


Figura 3.2: Moto laminare isoterma di un fluido Newtoniano incomprimibile fra due piani paralleli.

dunque la velocità fra i due piani paralleli dipende solo da  $y$ . Consideriamo le componenti fisiche delle equazioni di Navier Stokes adimensionalizzate lungo gli assi  $(x, y, z)$  forniscono

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.16)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.17)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.18)$$

Dalle ultime due deduciamo che  $p$  è uniforme nella sezione, mentre dalla prima deduciamo che  $dp/dx$  è una costante. Infatti poiché  $u$  non dipende da  $x$  abbiamo che  $\partial^2 u / \partial y^2$  non dipende da  $x$ . L'integrale generale è immediato

$$u(y) = \frac{1}{2} Re \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (3.19)$$

Impieghiamo le condizioni al contorno adimensionalizzate  $u(\pm 1) = 0$  per determinare un integrale particolare

$$\frac{1}{2} Re \frac{dp}{dx} - C_1 + C_2 = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{2} Re \frac{dp}{dx} + C_1 + C_2 = 0 \quad (3.21)$$

dal quale

$$C_2 = -\frac{1}{2} Re \frac{dp}{dx} \quad (3.22)$$

$$C_1 = 0 \quad (3.23)$$

Quindi

$$u(y) = \frac{1}{2} Re \frac{dp}{dx} (y^2 - 1) \quad (3.24)$$

Se abbiamo adimensionalizzato la velocità  $u$  con la velocità media  $U$  nella sezione, che è un funzionale della soluzione, allora significa che stiamo considerando la seguente condizione

di normalizzazione sulla velocità adimensionale

$$1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(y) dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} Re \frac{dp}{dx} (y^2 - 1) dy = \frac{1}{4} Re \frac{dp}{dx} \left( \frac{2}{3} - 2 \right) \quad (3.25)$$

Da questa relazione troviamo che

$$\frac{1}{2} Re \frac{dp}{dx} = -\frac{3}{2} \quad (3.26)$$

Pertanto

$$\boxed{u(y) = \frac{3}{2} (1 - y^2)} \quad (3.27)$$

### 3.1.3 Moto laminare isoterma di fluido Newtoniano incomprimibile fra due cilindri coassiali infiniti

Anche questo moto fu analizzato da Couette nel 1890. Si tratta del moto che ha luogo fra due cilindri coassiali animati da moto di rotazione relativo. I risultati sono importanti in campo tecnico, perché su essi si basano molti viscosimetri per la misura di viscosità moderate. Supponiamo che l'unica componente non nulla della velocità sia quella lungo  $\phi$ . Dall'equazione di continuità, scritta in termini di componenti fisiche di velocità

$$\frac{1}{r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0 \quad (3.28)$$

deduciamo che  $v_\phi$  non dipende da  $\phi$ . Pertanto abbiamo un'unica componente non nulla della velocità ed essa dipende esclusivamente da  $r$ . In questo caso abbiamo le seguenti componenti fisiche delle equazioni di Navier-Stokes

$$-\rho \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.29)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) - \frac{v_\phi}{r^2} \right] \quad (3.30)$$

La simmetria del problema impone  $\partial p / \partial \phi = 0$ . Pertanto la velocità  $v_\phi(r)$  è soluzione del seguente problema differenziale

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) - \frac{v_\phi}{r^2} = 0 \quad (3.31)$$

$$v_\phi(r_1) = \omega r_1 \quad (3.32)$$

$$v_\phi(r_2) = 0 \quad (3.33)$$

Per risolvere questo problema dobbiamo essere in grado di calcolarci la soluzione dell'equazione differenziale del secondo ordine

$$\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r^2} = 0 \quad (3.34)$$

Non si tratta perciò di un problema elementare. Si trova che la soluzione è

$$v_\phi(r) = \omega r \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( \frac{r_2^2}{r^2} - 1 \right) \quad (3.35)$$

Calcoliamo le componenti fisiche del tensore degli sforzi viscosi. Poiché il fluido è Newtoniano ed incomprimibile abbiamo

$$P^{ij} = 2\mu e^{ij} \quad \Rightarrow \quad P(ij) = \mu e(ij) \quad (3.36)$$

Ricordiamo che  $\Gamma_{\phi\phi}^r = -r$  mentre  $\Gamma_{r\phi}^\phi = 1/r$ . Per calcolarsi le componenti fisiche è comodo considerare la forma mista del tensore degli sforzi  $P_j^i$ , dato che per esso sappiamo che

$$P(ij) = P_j^i \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{jj}}} \quad (3.37)$$

In particolare per ottenere la componente dello sforzo  $P(r\phi) = P(\phi r)$  dobbiamo calcolarci la componente fisica della velocità di deformazione

$$e_\phi^r = \frac{1}{2} \left( u_{;\phi}^r + u_{;r}^\phi \right) \quad (3.38)$$

Le componenti fisiche di tale velocità di deformazione si ottengono sommando le componenti fisiche di quello che sta a destra cioè

$$e(r\phi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{g_{rr}}}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} u_{;\phi}^r + \frac{\sqrt{g_{\phi\phi}}}{\sqrt{g_{rr}}} u_{;r}^\phi \right) \quad (3.39)$$

Sappiamo che  $u_{;\phi}^r = 0 + \Gamma_{\phi\phi}^r u^\phi = -r u^\phi$  in questo caso. Inoltre

$$u_{;r}^\phi = \frac{\partial u^\phi}{\partial r} + \Gamma_{r\phi}^\phi u^\phi = \frac{\partial u^\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} u^\phi \quad (3.40)$$

Esprimendo  $u_{;\phi}^r$  e  $u_{;r}^\phi$  in componenti fisiche  $v_\phi = r u^\phi$  troviamo

$$u_{;\phi}^r = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{v_\phi}{r^2} \quad (3.41)$$

$$u_{;r}^\phi = -v_\phi \quad (3.42)$$

Pertanto la componente fisica della velocità di deformazione  $e(r\phi)$  è

$$e(r\phi) = \frac{1}{2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{v_\phi}{r} - \frac{v_\phi}{r} \right) = \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\phi}{r} \right) \quad (3.43)$$

La componente fisica dello sforzo viscoso è perciò

$$T(r\phi) = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\phi}{r} \right) \quad (3.44)$$

Sul cilindro interno il fluido esercita lo sforzo tangenziale

$$T(r\phi) = \mu r_1 \left| \frac{\partial}{\partial r} \left[ \omega \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( \frac{r_2^2}{r^2} - 1 \right) \right] \right|_{r=r_1} = 2\mu\omega \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (3.45)$$

dunque una coppia pari a

$$M = 4\pi\mu\omega \frac{r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (3.46)$$

Questa è anche la coppia trasmessa dal fluido al cilindro esterno, che se lasciato libero di ruotare si metterà a girare nello stesso verso di quello interno<sup>4</sup>. Da una misura della coppia necessaria a mantenere in rotazione costante il cilindro interno si risale (nelle ipotesi di moto laminare) alla viscosità dinamica.

<sup>4</sup>Con quale velocità? Se il cilindro esterno è privo di qualunque vincolo ed attrito (ad esempio dovuto ad

### 3.1.4 Moto laminare di fluido Newtoniano incomprimibile in un tubo cilindrico

Consideriamo la forma adimensionale delle equazioni di Navier-Stokes in coordinate cilindriche. Come abbiamo visto, tali equazioni sono piuttosto complesse e possono essere ricavate in forma completa utilizzando gli strumenti del calcolo tensoriale. Tuttavia, prima di procedere con i conti è opportuno eseguire tutte le semplificazioni possibili. Assumiamo che l'unica componente fisica non-nulla della velocità sia diretta lungo l'asse  $z$  ed assumiamo (per simmetria) che essa non dipenda da  $\phi$ . Dall'equazione di continuità qui di seguito scritta in componenti fisiche

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.47)$$

deduciamo che  $v_z$  non dipende neanche da  $z$ . Pertanto ricerchiamo una soluzione delle equazioni di Navier-Stokes nella forma  $v_z(r)$ . Tali equazioni in componenti fisiche si riducono alla<sup>5</sup>

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) = Re \frac{dp}{dz} \quad (3.48)$$

L'integrale generale è

$$v_z(r) = \frac{1}{4} Re \frac{dp}{dz} r^2 + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (3.49)$$

Con la condizione adimensionale  $v_z(0) < \infty$  otteniamo  $C_1 = 0$  mentre dalla  $u(1) = 0$  otteniamo<sup>6</sup>

$$v_z(r) = \frac{1}{4} Re \frac{dp}{dz} (r^2 - 1) \quad (3.50)$$

Se adimensionalizziamo il campo di velocità con la velocità media nella sezione abbiamo la seguente condizione di normalizzazione<sup>7</sup>

$$1 = \frac{1}{S} \int_S v_z(r) dS = 2 \int_0^1 v_z(r) r dr = -\frac{1}{4} Re \frac{dp}{dz} \frac{2}{4} \quad (3.51)$$

Pertanto otteniamo

$$\boxed{v_z(r) = 2(1 - r^2)} \quad (3.52)$$

---

uno strato limite di aria sulla sua superficie esterna), allora in un tempo infinito i due cilindri ruoteranno con la stessa velocità angolare. Infatti una qualunque coppia generata dalla tensione tangenziale indotta dal gradiente di velocità del fluido fra i due cilindri si traduce in una accelerazione angolare del cilindro esterno. Se la velocità di rotazione di quello interno viene mantenuta costante ciò che accade è che la coppia necessaria a mantenere tale rotazione si riduce asintoticamente nel tempo fino ad annullarsi.

<sup>5</sup>In coordinate cilindriche le equazioni di Navier-Stokes sono molto complesse. Per ottenere l'equazione che descrive il flusso laminare in un tubo cilindrico ci si può ricordare che in questo caso il Laplaciano della componente fisica della velocità  $v_z$  coincide con il Laplaciano di uno scalare che dipende solo da  $r$ .

<sup>6</sup>Utilizziamo il raggio come lunghezza caratteristica e la velocità media nella sezione come velocità caratteristica. La velocità media è un funzionale della soluzione, che una volta calcolata sarà pertanto soggetta ad una condizione di normalizzazione.

<sup>7</sup>L'area adimensionalizzata sul raggio è  $S = \pi$  mentre l'incremento di area adimensionalizzato è  $dS = 2\pi r dr$ .

**Osservazione** Notiamo che la scelta della lunghezza di adimensionalizzazione può essere fatta dal principio in modo arbitrario. In particolare possiamo scegliere di adimensionalizzare da subito con il diametro medio. In questo modo otteniamo direttamente la relazione (3.99).

### Flusso nell'intercapedine fra due cilindri circolari coassiali

Chiaramente possiamo utilizzare l'integrale generale

$$v_z(r) = \frac{1}{4} Re \frac{\partial p}{\partial z} r^2 + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (3.53)$$

per determinare la geometria del flusso fra due cilindri coassiali. A tal fine è sufficiente considerare le condizioni al contorno

$$v_z(r_1) = v_z(r_2) = 0 \quad (3.54)$$

in cui  $r_1 = R_1/D$  ed  $r_2 = R_2/D$  sono i raggi del cilindro interno ed esterno, adimensionalizzati con il diametro del cilindro esterno.

### Calcolo del numero di Nusselt asintotico per una condizione di flusso di calore costante sulle pareti del tubo

Consideriamo il problema di convezione forzata per il sistema illustrato in figura 3.3 in cui il fluido è in moto laminare completamente sviluppato. Vogliamo calcolare il numero di Nusselt lontano dalla regione di ingresso termica per una condizione al contorno di flusso di calore imposto.

Sappiamo che il numero di Nusselt *locale* è la derivata della temperatura adimensionale nella direzione normale alla superficie. Pertanto al fine di determinare tale raggruppamento adimensionale che, se vogliamo, rappresenta la forma adimensionale del coefficiente di convezione abbiamo la necessità di calcolarci la distribuzione di temperatura nel fluido che scorre all'interno del tubo. Consideriamo pertanto l'equazione adimensionalizzata del calore (senza il termine generativo  $\mathcal{D}$ ) espressa in componenti fisiche della velocità per un fluido Fourieriano in geometria cilindrica

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Pe} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (3.55)$$

Considerando la simmetria assiale del problema abbiamo  $T(r, z)$ <sup>8</sup>. Inoltre utilizzando i risultati della sezione precedente concludiamo che in regime idrodinamico completamente sviluppato l'unica componente non nulla della velocità è  $v_z(r)$ . Pertanto otteniamo

$$Pe \frac{\partial T}{\partial z} v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (\text{regione di ingresso termico}) \quad (3.56)$$

La precedente equazione individua lo *strato limite termico*. Per coordinate  $z$  molto maggiori di quelle che individuano la regione di ingresso termico abbiamo un profilo di temperatura completamente sviluppato. In tale zona si può dimostrare che per flussi di calore

<sup>8</sup>Notiamo che in coordinate fisse la temperatura non dipende dal tempo, cioè per fissati  $(r, z)$  si ha una costante  $T(r, z)$ . Se invece valutassimo la temperatura seguendo una particella del fluido si avrebbe  $T(\hat{r}(\boldsymbol{\xi}, t), \hat{z}(\boldsymbol{\xi}, t))$  in cui appare esplicita la dipendenza dal tempo.

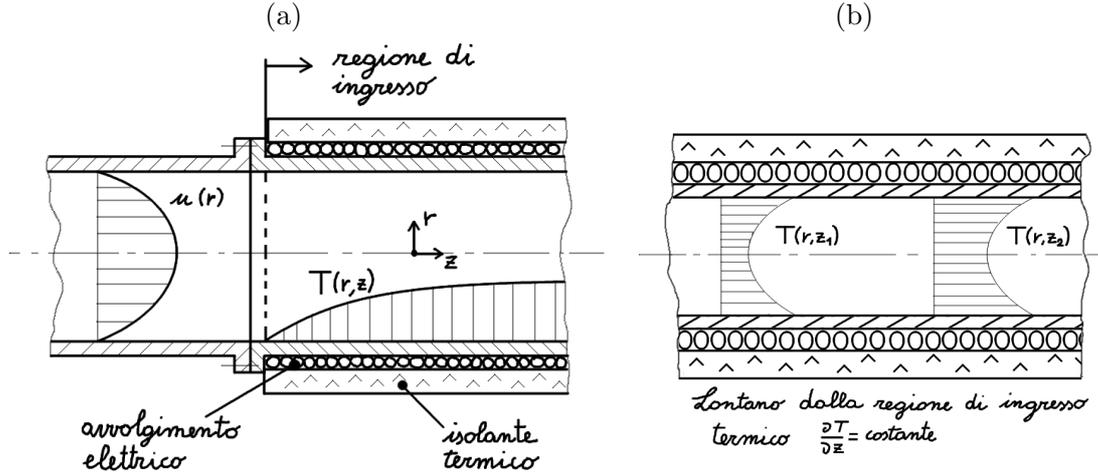


Figura 3.3: (a) Regione di ingresso termico in un flusso alla Poiseuille completamente sviluppato. (b) Andamento di temperatura lontano dalla regione di ingresso per una condizione al contorno di flusso termico costante.

costanti alla parete si ha vale  $\partial T/\partial z = B = \text{costante}$ <sup>9</sup>. Pertanto

$$PeBv_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (\text{profilo di temperatura sviluppato}) \quad (3.57)$$

Una adimensionalizzazione della temperatura conveniente per lo studio dello scambio di calore asintotico (molto lontano dalla regione di ingresso) è

$$T(r, z) = \frac{t(r, z) - t_w(z)}{t_m(z) - t_w(z)} \quad (3.58)$$

ove  $t_w(z)$  e  $t_m(z)$  sono rispettivamente la temperatura di parete e la temperatura di mescolamento nella sezione  $z$ . Anche il coefficiente di convezione locale  $h(z)$  si definisce utilizzando come differenza di temperatura di riferimento  $t_m(z) - t_w(z)$

$$q(z) = h(z) (t_m(z) - t_w(z)) \quad (3.59)$$

Sostituendo il profilo di Poiseuille adimensionale  $v_z = 2(1 - r^2)$  in (3.57) ci troviamo a dover risolvere l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \underbrace{2PeB}_{A} r (1 - r^2) \quad (3.60)$$

L'integrale generale è

$$T(r) = A \left( \frac{1}{4} r^2 - \frac{1}{16} r^4 \right) + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (3.61)$$

<sup>9</sup>La dimostrazione non è banale è passa attraverso la soluzione dell'equazione dello strato limite. In pratica tale condizione ci dice che per  $z \rightarrow \infty$  l'incremento di temperatura nella direzione del moto è una costante per ogni  $r$ . In altre parole per fissato  $dz$  tale incremento è lo stesso per gli elementi fluido che passano molto lentamente vicino alla superficie del tubo sia per quelli che passano molto velocemente vicino all'asse del tubo.

Le costanti di integrazione  $C_1$  e  $C_2$  si determinano utilizzando le condizioni al contorno adimensionali (ottenute impiegando l'adimensionalizzazione standard (3.58))

$$T(0) < \infty \quad (\text{valore finito della temperatura sull'asse}) \quad (3.62)$$

$$T(1) = 0 \quad (\text{temperatura fluido coincidente con quella di parete}) \quad (3.63)$$

Da esse risulta  $C_1 = 0$  e  $C_2 = -3/16A$ , rispettivamente. Pertanto

$$T(r) = A \left( -\frac{3}{16} + \frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{16}r^4 \right) \quad (3.64)$$

Ora, al solito, cerchiamo di eliminare la costante  $A$  utilizzando alcune proprietà della adimensionalizzazione che abbiamo eseguito. A tal fine notiamo che dalla adimensionalizzazione fatta, la temperatura di mescolamento adimensionalizzata vale 1

$$T_m = \frac{t_m - t_w}{t_m - t_w} = 1 \quad (3.65)$$

dalla quale deduciamo

$$\underbrace{\frac{1}{S} \int_S v_z dS}_{=1} = \frac{1}{S} \int_S T v_z dS = \frac{1}{\pi} \int_0^1 T v_z 2\pi r dr \quad (3.66)$$

Il valore medio della velocità adimensionalizzata è 1 perciò

$$1 = 2A \int_0^1 2(1-r^2) \left( -\frac{3}{16} + \frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{16}r^4 \right) r dr \quad (3.67)$$

Eseguendo i calcoli troviamo

$$\begin{aligned} 1 &= 4A \int_0^1 \left( -\frac{3}{16} + \frac{7}{16}r^3 - \frac{5}{16}r^5 + \frac{1}{16}r^7 \right) dr \\ &= 4A \left( -\frac{3}{32} + \frac{7}{64} - \frac{5}{96} + \frac{1}{128} \right) \\ &= A \left( \frac{1}{16} - \frac{5}{24} + \frac{1}{32} \right) \\ &= -\frac{11}{96}A \end{aligned} \quad (3.68)$$

Pertanto otteniamo il profilo adimensionale di temperatura nella regione completamente sviluppata è

$$\boxed{T(r) = \frac{96}{11} \left( \frac{3}{16} + \frac{1}{16}r^4 - \frac{1}{4}r^2 \right)} \quad (3.69)$$

Notare che apparentemente il profilo di temperatura non dipende da  $z$ . In realtà dalla (3.68) deduciamo che l'incremento della temperatura adimensionale lungo  $z$  è

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{48}{11} \frac{1}{Pe} \quad \Rightarrow \quad T(r, z_2) - T(r, z_1) = -\frac{48}{11} \frac{(z_2 - z_1)}{Pe} \quad (3.70)$$

Dipendentemente dal segno di  $t_w - t_m$  (vd. (3.58)) la temperatura può essere crescente o decrescente lungo l'asse del tubo, cioè il flusso termico può essere diretto verso il fluido

o dal fluido verso fuori. Se adimensionalizzamo con il diametro invece che con il raggio otteniamo

$$T(r') = \frac{96}{11} \left( \frac{3}{16} + r'^4 - r'^2 \right) \quad (3.71)$$

Il numero di Nusselt locale si ottiene da

$$Nu = - \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r'=1/2} = - \frac{96}{11} \left( \frac{4}{8} - \frac{2}{2} \right) = \frac{48}{11} \simeq 4.36363636.. \quad (3.72)$$

Questo risultato vale per profili di temperatura e velocità completamente sviluppati in tubi aventi condizioni al contorno di flusso termico costante. Il profilo fisico di temperatura cresce sempre lungo l'asse del tubo e può avere l'andamento illustrato in figura 3.3(b) nel caso in cui  $t_w > t_m$ .

### Correlazioni per lo scambio termico in condizioni di flusso turbolento

La semplice teoria analitica sviluppata nella sezione precedente è relativa ad un flusso laminare. In condizioni di flusso turbolento, non vi è modo di determinare il coefficiente di scambio termico se non per via empirica o semi-empirica. Data la grande rilevanza pratica del problema, sono state determinate numerose correlazioni per calcolare lo scambio termico in un tubo circolare in regime di flusso turbolento. Per un flusso turbolento completamente sviluppato abbiamo, ad esempio

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{1/3} \quad 0.7 < Pr < 160 \quad Re > 10^4 \quad (\text{eq. Colburn}) \quad (3.73)$$

Molte correlazioni di questo tipo utilizzando l'analogia di Reynolds-Colburn

$$\boxed{St_x Pr^{2/3} = \frac{f}{8}} \quad (3.74)$$

introducendo una espressione opportuna per il fattore d'attrito  $f$ , che è funzione del numero di Reynolds ed esplicitando il numero di Stanton  $St_x = Nu_x / Pe$ . Questa espressione è rigorosamente valida per flussi laminari su lastre piane, e la sua estensione ad altri casi va giustificata di volta in volta.

#### 3.1.5 Regione di ingresso idrodinamica e termica

Avendo determinato i profili di velocità e temperatura in condizioni di moto completamente sviluppato ci possiamo chiedere in quale sezione della condotta si raggiunge una tale condizione se si parte da una condizione di isotermia e distribuzione *uniforme* della velocità nella sezione di ingresso. Ovviamente vi sono diversi casi possibili, dipendentemente dal fatto che il profilo di velocità sia inizialmente già sviluppato oppure no. Nel primo caso si parla di regione di ingresso termica, nel secondo si parla di contemporaneo sviluppo dello strato limite termico ed idrodinamico. La *lunghezza* della regione di ingresso termica o idrodinamica è definita come quella distanza dalla sezione di inizio di sviluppo dello strato limite oltre il quale la velocità o la temperatura raggiunge il 99% del valore della regione completamente sviluppata. La lunghezza della regione di ingresso termica dipende dal tipo di condizioni al contorno e dalle proprietà termofisiche del fluido. In particolare per condizioni di flusso di calore imposto abbiamo una dipendenza dal numero di Peclét mentre per temperatura imposta abbiamo dipendenza dal numero di Reynolds soltanto.

In ogni caso la determinazione teorica della lunghezza della regione di ingresso presuppone la capacità di sapere risolvere le equazioni dello strato limite termico, ed idrodinamico se necessario. Tali equazioni in coordinate cilindriche sono

$$\frac{\partial T}{\partial z} u = \frac{1}{Pe} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (\text{strato limite termico}) \quad (3.75)$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{eq. continuità}) \quad (3.76)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \quad (3.77)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (3.78)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} \quad (3.79)$$

Giova rilevare che si tratta di un problema differenziale *stazionario* in cui vi sono due componenti della velocità ( $v_z$  e  $v_r$ ). Infatti se vi fosse solo  $v_z$  si avrebbe un fenomeno necessariamente costante lungo  $z$  (come deduciamo dall'equazione di continuità). La soluzione di questo sistema di equazioni è molto complessa. Al fine di predire lo scambio di calore nella regione di ingresso sono state proposte varie correlazioni empiriche che permettono di individuare il Nusselt medio ad una certa distanza dall'ingresso del tubo circolare. Ad esempio

$$Nu_m = 3.66 + \frac{0.0668 Gz}{1 + 0.04 Gz^{2/3}} \quad (\text{correlazione di Hausen}) \quad (3.80)$$

in cui

$$Nu_m = \frac{h_m D}{k} \quad (3.81)$$

$$Gz = \frac{Pe}{L/D} \quad (L = \text{distanza dall'ingresso}) \quad (3.82)$$

$$Re = \frac{u_m D}{\nu} \quad (3.83)$$

## 3.2 Scambio termico in metalli liquidi

Molte correlazioni ottenute per via sperimentale o analitica hanno un campo di validità che non include il caso di metalli liquidi (litio, sodio, potassio, ecc...). Questi fluidi hanno un numero di Prandtl  $Pr = \mu c_p / k$  molto piccolo ( $0.02 \div 0.003$ ) a causa dell'elevata conduttività termica. Pertanto la convezione forzata in presenza di metalli liquidi è stata oggetto di numerosi studi specifici. Nella prossima sezione analizziamo nel dettaglio lo scambio termico su lastra piana isoterma in presenza di metallo liquido.

### 3.3 Fattore d'attrito e caduta di pressione per flussi viscosi e stazionari all'interno di tubi di sezione arbitraria

#### 3.3.1 Flussi laminari

Consideriamo un fluido Newtoniano incomprimibile in moto *laminare* e stazionario all'interno di un tratto di condotta rettilinea ed orizzontale avente sezione arbitraria. Consideriamo un sistema di coordinate cartesiano ed ortogonale  $(x, y, z)$  il cui asse  $x$  sia diretto parallelamente all'asse della condotta. Scegliamo  $z$  verticale verso l'alto. Supponiamo che l'unica componente non nulla della velocità sia quella parallela all'asse  $x$ , che indichiamo con  $u$ . La condizione di divergenza nulla allora impone subito

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.84)$$

cioè la velocità non varia lungo l'asse del condotto. In altre parole la velocità  $u$  dipende solo da  $(y, z)$ . Questo flusso viscoso e stazionario è soluzione delle equazioni di Navier-Stokes (adimensionalizzate), le cui componenti cartesiane sono

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.85)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.86)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.87)$$

in cui  $x = X/D$ ,  $y = Y/D$ ,  $z = Z/D$ ,  $p = P/(\rho u_m^2)$ ,  $Re = u_m D/\nu$  sono quantità adimensionali. La quantità  $u_m$  è di norma la velocità media nella sezione del condotto, mentre  $D$  è il *diametro medio* della sezione definito come<sup>10</sup>

$$D = \frac{4S}{\mathcal{P}} \quad \left( \frac{4 \cdot \text{area}}{\text{perimetro}} \right) \quad (3.88)$$

Dalle equazioni (3.86) e (3.87) deduciamo che la pressione è uniforme su ogni sezione e che il gradiente di pressione lungo l'asse del tubo è costante. Infatti tale gradiente è pari a  $\nabla^2 u/Re$  che, come abbiamo visto, non dipende da  $x$  (dato che  $u$  non dipende da  $x$ ).

Consideriamo ora un tratto di condotta finito ed applichiamo l'equazione integrale di bilancio dell'energia meccanica in forma adimensionalizzata<sup>11</sup>. Tale equazione fornisce

$$-\frac{dP}{dX}L = \rho R \quad \Rightarrow \quad -\frac{dp}{dx} = \frac{D}{Lu_m^2}R = \frac{1}{2} \frac{D}{L} \frac{2}{u_m^2}R \quad (3.91)$$

<sup>10</sup>Per una sezione circolare  $D = d$  mentre per una sezione quadrata  $D = L$ .

<sup>11</sup>In condizioni stazionarie la velocità media  $u_m$  si conserva fra le sezioni di ingresso ed uscita, e l'equazione di bilancio assume la forma

$$P_1 - P_2 = \rho R \quad (3.89)$$

Inoltre, se il gradiente di pressione è costante lungo la direzione del moto allora, per un tratto di lunghezza  $L$

$$P_2 - P_1 = \frac{dP}{dX}L \quad (3.90)$$

in cui  $P$  e  $X$  hanno dimensione in un sistema di unità di misura

avendo adimensionalizzato  $P$  con  $\rho u_m^2$  ed  $x$  con  $D$ . Dalla forma adimensionalizzata del bilancio di energia meccanica (3.91) è chiaro che conviene definire la perdita fluidodinamica  $R$  nella forma

$$R = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2} \quad (3.92)$$

in cui il coefficiente adimensionale  $f$  si dice *fattore di attrito*. Con tali definizioni otteniamo facilmente

$$\boxed{f = -2 \frac{dp}{dx} = -\frac{2}{Re} \nabla^2 u} \quad (3.93)$$

Notiamo che il Laplaciano adimensionale assume lo stesso valore in ogni sezione del tubo dato che tale è il gradiente di pressione. Pertanto, se è noto il profilo di velocità adimensionalizzato la velocità media ed il diametro medio il calcolo del coefficiente d'attrito può essere fatto analiticamente. Il risultato (3.93) è del tutto generale e ci dice che per un flusso laminare di un fluido Newtoniano incomprimibile all'interno di un tubo il fattore di attrito è sempre nella forma  $f = c/Re$ . In coordinate logaritmiche questa relazione è una retta con coefficiente angolare  $-c$ .

**Fattore d'attrito per flusso laminare fra piani paralleli** Possiamo facilmente calcolarci il fattore d'attrito impiegando la definizione

$$f = -2 \frac{dp}{dx} = -\frac{2}{Re} \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (3.94)$$

A tal fine occorre scegliere come lunghezza di riferimento il diametro *medio* della sezione, che nel presente caso è

$$D = \frac{4S}{\mathcal{P}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{4a2Y_0}{2(a+2Y_0)} = \frac{4Y_0}{(1+2Y_0/a)} = 4Y_0 \quad (3.95)$$

Se adimensionalizziamo le lunghezze utilizzando  $D$ , cioè consideriamo

$$y' = Y/D = Y/(4Y_0) = y/4 \quad (3.96)$$

troviamo la seguente espressione per il profilo di velocità

$$u(y) = \frac{3}{2} (1 - 16y'^2) \Rightarrow \frac{d^2 u}{dy'^2} = -\frac{96}{2} \quad (3.97)$$

Pertanto

$$\boxed{f = \frac{96}{Re}} \quad (3.98)$$

**Fattore d'attrito per flusso laminare in tubi cilindrici** Il diametro medio per un cilindro coincide con il diametro effettivo ed è pari al doppio del raggio. Se una nuova variabile di adimensionalizzazione  $r' = R/D = R/2R_0 = r/2$  troviamo la seguente espressione della velocità

$$v_z(r) = 2(1 - 4r'^2) \quad (3.99)$$

Pertanto concludiamo che il fattore d'attrito è

$$f = -\frac{2}{Re} \nabla^2 v_z = -\frac{2}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial v_z}{\partial r'} \right) = \frac{2}{Re} (32 + 32) \quad (3.100)$$

$$\boxed{f = \frac{64}{Re}} \quad (3.101)$$

### 3.3.2 Flussi turbolenti

Nel caso di flusso turbolento le considerazioni del paragrafo precedente sulla distribuzione di velocità non si applicano più. In particolare non è possibile determinare teoricamente la distribuzione di velocità in prossimità di una parete solida (boundary layer) o più in generale nel fluido. Le condizioni di moto sono tutt'altro che stazionarie, e non è ancora disponibile una teoria in grado di predire teoricamente la distribuzione di velocità in condizioni di turbolenza. È possibile tuttavia ottenere delle equazioni che caratterizzano l'evoluzione temporale delle grandezze medie, considerando in aggiunta al tensore degli sforzi un tensore degli sforzi di Reynolds che (purtroppo) va modellizzato opportunamente sulla base di dati sperimentali o altri tipi di informazioni *a posteriori*.

La distribuzione di velocità in vari flussi turbolenti è stata studiata in modo estensivo da un punto di vista sperimentale. In particolare sono state determinate con grande precisione le distribuzioni di velocità adimensionali nello strato limite turbolento su lastra piana (flat plate boundary layer) e all'interno di tubi circolari lisci.

#### Esperimenti di Nikuradse

Nikuradse (1933) fu uno dei primi sperimentatori che presentò misurazioni accurate della distribuzione di velocità in flussi turbolenti all'interno di tubi lisci. Successivamente altri Autori studiarono il caso della lastra piana. In tutti questi lavori vi è il tentativo di interpolare i risultati sperimentali utilizzando opportune funzioni che correlano una velocità adimensionalizzata con la distanza adimensionale dalla parete solida. Le correlazioni sono di norma riportate in funzione di

$$u^+ = \frac{u}{u_0} \quad (3.102)$$

$$y^+ = \frac{u_0}{\nu} y \quad (3.103)$$

in cui  $u$  è la velocità media misurata mentre

$$u_0 = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (3.104)$$

è la *velocità d'attrito* ottenuta come rapporto fra la tensione tangenziale indotta dal fluido sulla parete  $\tau_0$  la densità del fluido.

**Tubi idrodinamicamente lisci** I risultati sperimentali ottenuti da Nikuradse (1933) per il caso di tubo *idrodinamicamente liscio* sono

$$u^+ = y^+ \quad (\text{sottostrato laminare viscoso}) \quad 0 \leq y^+ \leq 5 \quad (3.105)$$

$$u^+ = 5.0 \ln(y^+) - 3.05 \quad (\text{strato limite di transizione}) \quad 5 \leq y^+ \leq 30 \quad (3.106)$$

$$u^+ = 2.5 \ln(y^+) + 5.5 \quad (\text{strato limite turbolento}) \quad y^+ \geq 30 \quad (3.107)$$

Il coefficiente angolare che caratterizza lo strato limite turbolento è stato ritrovato anche in altri esperimenti con flussi turbolenti, ad esempio il flusso su una lastra piana, e sembra essere una costante *universale*. In effetti si è mostrato che tale costante è fortemente correlata alla lunghezza di mescolamento del fenomeno turbolento.

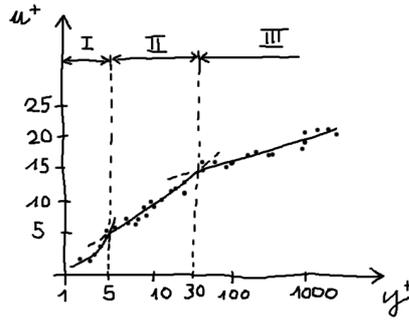


Figura 3.4: Distribuzione logaritmica di velocità per flusso turbolento all'interno di tubi lisci.

**Effetti della rugosità superficiale sulla distribuzione di velocità** I risultati del paragrafo precedente si applicano a tubi cilindrici aventi superfici idrodinamicamente lisce<sup>12</sup>. Sempre nel 1933 Nikuradse eseguì una serie di esperienze con tubi resi artificialmente scabri mediante l'applicazione di sabbie omogenee costituite da grani aventi di diametro medio controllato  $\epsilon$ . Questi esperimenti hanno mostrato che per classificare la rugosità di una superficie è conveniente introdurre un parametro adimensionale

$$\epsilon^+ = \frac{u_0}{\nu} \epsilon \quad (\text{scabrezza adimensionale}) \quad (3.108)$$

per il quale si verifica che

$$\epsilon^+ \leq 5 \quad (\text{idrodinamicamente liscia}) \quad (3.109)$$

$$5 \leq \epsilon^+ \leq 70 \quad (\text{transizione}) \quad (3.110)$$

$$\epsilon^+ \geq 70 \quad (\text{scabra}) \quad (3.111)$$

Per un flusso in un tubo con superficie scabra (cioè  $\epsilon^+ \geq 70$ ) è stato mostrato sperimentalmente da Nikuradse che la distribuzione di velocità adimensionalizzata ha la forma

$$u^+ = 2.5 \ln \left( \frac{y}{\epsilon} \right) + 8.5 \quad (3.112)$$

Questo vale per tubi di laboratorio con scabrezza in sabbia controllata. I tubi commerciali si comportano in modo diverso. In particolare la distribuzione di velocità adimensionale è tale da eliminare la gobba nel grafico del fattore d'attrito (vd. figura 3.5(a)).

### Calcolo del fattore d'attrito per flussi turbolenti in tubi cilindrici nota la distribuzione adimensionale della velocità

Lo sforzo tangenziale medio agente sulla superficie di un tubo cilindrico orizzontale si ottiene dal bilancio è

$$\tau_0 2\pi r L = \Delta P \pi r^2 \quad (3.113)$$

<sup>12</sup>Una superficie si definisce idrodinamicamente liscia quando la rugosità superficiale ha dimensione caratteristica molto minore del sottostrato limite viscoso.

Dalla precedente otteniamo

$$\tau_0 = \frac{1}{L} \frac{D}{4} \Delta P = -\frac{1}{L} \frac{D}{4} \frac{dP}{dX} L = -\frac{D}{4} \frac{\rho U^2}{D} \frac{dp}{dx} \quad (3.114)$$

Ricordando che il gradiente adimensionale di pressione è tale che<sup>13</sup>  $dp/dx = -f/2$  otteniamo

$$\tau_0 = \frac{1}{8} f \rho u_m^2 \quad (3.116)$$

Con la tensione tangenziale media possiamo calcolarci la velocità d'attrito

$$u_0 = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u_m \sqrt{\frac{f}{8}} \quad (3.117)$$

Pertanto la velocità adimensionale  $u^+$  è data da

$$u^+ = \frac{u}{u_0} \quad (3.118)$$

Integriamo la velocità  $u$  nella sezione. Per definizione

$$u_m = \frac{1}{S} \int_S u_0 u^+ dS = u_m \sqrt{\frac{f}{8}} \frac{1}{S} \int_S u^+ dS \quad (3.119)$$

Dalla quale segue

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{1}{S} \int_S u^+ dS} \quad (3.120)$$

che permette di calcolare il valore del fattore di attrito  $f$  noto l'andamento della velocità adimensionalizzata  $u^+$ . Introducendo la relazione

$$u^+ = 2.5 \ln(y^+) + 5.5 \quad (\text{regime turbolento, tubo liscio}) \quad (3.121)$$

troviamo

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left( \frac{\sqrt{f} Re}{2.51} \right) \quad (\text{Prandtl-von Kármán}) \quad (3.122)$$

Questa è una relazione implicita<sup>14</sup> che può essere risolta per via numerica per determinare la funzione  $f(Re)$ . Se introduciamo

$$u^+ = 2.5 \ln \left( \frac{y}{\epsilon} \right) + 8.5 \quad (\text{regime turbolento, tubo molto scabro}) \quad (3.124)$$

<sup>13</sup>Attenzione, questa espressione è stata determinata in condizioni di moto laminare, qui siamo in condizioni di moto turbolento. Le equazioni del moto medio comunque ci dicono che il gradiente di pressione medio non dipende da  $x$ . Alternativamente possiamo *definire* il fattore d'attrito in modo tale che la caduta di pressione media in condizioni di moto turbolento sia

$$\Delta P := f \frac{L}{D} \frac{\rho u_m^2}{2} \quad (3.115)$$

<sup>14</sup>Il motivo per cui salta fuori una relazione implicita è dovuto al fatto che la coordinata  $y^+$  è anch'essa adimensionalizzata con la velocità di attrito  $u_0$

$$y^+ = \frac{\nu}{u_0} y = \frac{\nu}{u_m} \sqrt{\frac{8}{f}} y \quad (3.123)$$

Pertanto, allorché (3.121) è sostituita in (3.120) abbiamo che  $f$  compare sia sotto il segno di integrale, sia a sinistra dell'uguale.

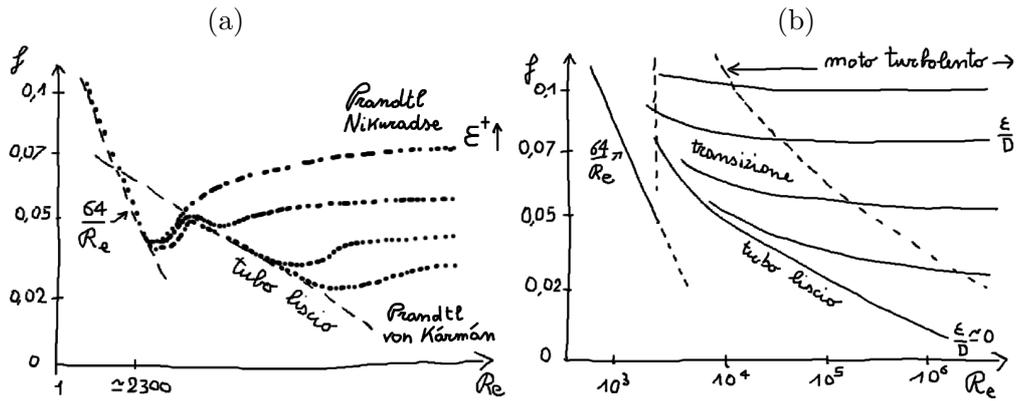


Figura 3.5: (a) Fattore d'attrito ottenuto con tubi di laboratorio aventi fissata scabrezza equivalente in sabbia (Nikuradse (1933)). Notare la presenza della gobbia subito dopo la curva di tubo liscio. (b) Diagramma di Moody.

troviamo

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left( 3.71 \frac{D}{\epsilon} \right) \quad (\text{Prandtl-Nikuradse}) \quad (3.125)$$

Notare che quest'ultima relazione non dipende da  $Re$ .

Per tubi commerciali la relazione (implicita) più utilizzata per determinare il fattore di attrito quella di Colebrook e White (1939) in cui compare una "scabrezza equivalente"

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{2.51}{\sqrt{f} Re} + \frac{\epsilon}{3.71 D} \right) \quad (\text{Colebrook \& White}) \quad (3.126)$$

La rappresentazione grafica completa del fattore d'attrito fu successivamente data da Moody nel 1944 utilizzando un diagramma logaritmico che prese poi il suo nome. Chiaramente, noto il fattore d'attrito per il flusso all'interno della tubazione è semplice calcolarsi il coefficiente

$$R = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2} \quad (3.127)$$

## Capitolo 4

# Convezione forzata esterna

Nel capitolo 3 abbiamo studiato lo scambio termico ed il fattore d'attrito per flussi non isotermi laminari e turbolenti all'interno di condotte. In questo capitolo riportiamo alcuni risultati di moto isotermo e non isotermo di fluidi su superfici piane ed intorno a corpi solidi. La soluzione analitica di questi problemi è di norma più difficile rispetto al caso di flusso

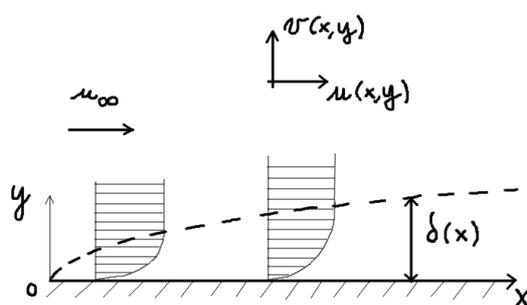


Figura 4.1: Strato limite laminare per un flusso su una superficie piana.

laminare nelle condotte dato che il moto è molto probabilmente almeno bidimensionale e la geometria più complicata. Tuttavia vi è almeno un caso in cui si può assumere che il moto sia *quasi* monodimensionale e questo caso si riferisce allo sviluppo di uno strato limite *laminare* su una superficie piana ( $Re < 5 \times 10^5$ ). Si ritiene che le equazioni che descrivono tale fenomeno siano

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.3)$$

cioè si assume  $\partial p / \partial x \simeq 0$ ,  $\partial^2 u / \partial x^2 \simeq 0$  e  $\partial^2 T / \partial x^2 \simeq 0$ . Notiamo che le componenti della velocità sono comunque 2 altrimenti dall'equazione di continuità si deduce che la

componente  $u$  della velocità non può aumentare lungo  $x$ . Le condizioni al contorno per lo strato limite laminare sono

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{per } x, y = 0 \quad (4.4)$$

$$u \rightarrow u_\infty \quad \text{per } x = \delta(x) \quad (4.5)$$

Fuori dallo strato limite abbiamo  $u = u_\infty$ . Pertanto se determiniamo la soluzione del problema all'interno dello strato limite abbiamo una descrizione completa del campo di velocità sulla lastra piana. La prima soluzione analitica di questo problema fu determinata da Blasius, utilizzando la funzione di corrente. Egli trasformò le equazioni dello strato limite in una equazione differenziale ordinaria del terzo ordine che si riesce a risolvere esattamente con delle espansioni in serie oppure in modo approssimato utilizzando metodi numerici. Noto il campo di velocità è possibile determinare la tensione tangenziale alla parete

$$\tau_{yx} = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (4.6)$$

ed il coefficiente di resistenza locale<sup>1</sup>

$$c(x) = \frac{2\nu}{u_\infty^2} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (4.9)$$

### 4.0.3 Soluzione di von Kármán per lo strato limite laminare

Riportiamo la soluzione di von Kármán (più semplice di quella di Blasius) dello strato limite su lastra piana. Integriamo l'equazione (4.2) sullo strato limite

$$\int_0^{\delta(x)} u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{\delta(x)} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \nu \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \quad (4.10)$$

Il secondo membro equivale a

$$\nu \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \nu \left( \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\delta(x)} - \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \right) = -\nu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (4.11)$$

Inoltre, eseguendo una integrazione per parti ed utilizzando l'equazione di continuità

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta(x)} v \frac{\partial u}{\partial y} dy &= [vu]_0^{\delta(x)} - \int_0^{\delta(x)} u \frac{\partial v}{\partial y} dy \\ &= u_\infty v(\delta(x)) + \int_0^{\delta(x)} u \frac{\partial u}{\partial x} dy \end{aligned} \quad (4.12)$$

---

<sup>1</sup>Il coefficiente di resistenza rappresenta la proporzionalità fra la densità di energia cinetica della corrente indisturbata e la forza agente sul corpo nella direzione del moto del fluido

$$F = c_D S \rho \frac{u_\infty^2}{2} \quad (4.7)$$

La superficie  $S$  è di norma la superficie esposta al moto (o *area frontale*:  $LD$  nel caso del cilindro,  $\pi D^2/4$  per una sfera) per un corpo solido investito dal fluido, oppure semplicemente la superficie nel caso di una lastra piana orientata parallelamente al flusso. Se si considera la tensione tangenziale locale  $F/S$  abbiamo

$$\tau_{yx} = c_D \rho \frac{u_\infty^2}{2} \quad (4.8)$$

Il valore della  $v$  per  $y = \delta(x)$  si ottiene integrando l'equazione di continuità

$$\int_0^{\delta(x)} \frac{\partial v}{\partial y} dy = - \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial u}{\partial x} dy \Rightarrow v(\delta(x)) = - \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (4.13)$$

Otteniamo infine

$$2 \int_0^{\delta(x)} u \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^{\delta(x)} u_{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} dy = -\nu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (4.14)$$

che equivale a

$$\boxed{\frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} u (u_{\infty} - u) dy = \nu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}} \quad (4.15)$$

Supponiamo che per un certo  $x$  fissato la soluzione si nella forma

$$u(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + a_3(x)y^3 \quad (4.16)$$

In cui le 4 funzioni  $a_0, \dots, a_3$  si determinano con le condizioni al contorno

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, \delta(x)) = u_{\infty}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0 \quad (4.17)$$

L'ultima condizione si ottiene valutando l'equazione di Navier (4.2) sulla superficie della lastra ove  $u, v = 0$ . Sostituendo troviamo:

$$a_0(x) = 0 \quad (4.18)$$

$$a_1(x) = \frac{3}{2} \frac{u_{\infty}}{\delta(x)} \quad (4.19)$$

$$a_2(x) = 0 \quad (4.20)$$

$$a_3(x) = -\frac{1}{2} \frac{u_{\infty}}{\delta(x)^3} \quad (4.21)$$

Pertanto

$$\boxed{\frac{u(x, y)}{u_{\infty}} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta(x)} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta(x)} \right)^3} \quad (4.22)$$

Sostituendo (4.22) in (4.15) ed eseguendo i calcoli si ottiene

$$\begin{aligned} u_{\infty}^2 \int_0^{\delta(x)} \frac{u}{u_{\infty}} \left( 1 - \frac{u}{u_{\infty}} \right) dy &= u_{\infty}^2 \int_0^{\delta(x)} \left[ \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{9}{4} \frac{y^2}{\delta^2} - \frac{1}{2} \frac{y^3}{\delta^3} + \frac{3}{2} \frac{y^4}{\delta^4} - \frac{1}{4} \frac{y^6}{\delta^6} \right] dy \\ &= u_{\infty}^2 \delta(x) \left( \frac{3}{4} - \frac{9}{12} - \frac{1}{8} + \frac{3}{10} - \frac{1}{28} \right) \\ &= u_{\infty}^2 \delta(x) \frac{39}{280} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Inoltre

$$\nu u_{\infty} \left. \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u}{u_{\infty}} \right) \right|_{y=0} = \frac{3\nu u_{\infty}}{2\delta(x)} \quad (4.24)$$

Otteniamo infine che (4.15) equivale a

$$\frac{39}{280} \frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{3}{2u_{\infty}\delta(x)} \quad (4.25)$$

cioè una equazione differenziale a variabili separabili, con la condizione al contorno  $\delta(0) = 0$

$$\delta(x)d\delta(x) = \frac{140}{13} \frac{\nu}{u_\infty} dx \quad (4.26)$$

Integrando da 0 a  $x$  otteniamo la soluzione del problema

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{280}{13} \frac{\nu x}{u_\infty}} \quad (4.27)$$

Se adimensionalizziamo lo spessore dello strato limite laminare con la coordinata a cui si trova tale spessore abbiamo

$$\frac{\delta(x)}{x} = \sqrt{\frac{280}{13 Re_x}} \simeq \frac{4.64}{Re_x^{1/2}} \quad (4.28)$$

Il coefficiente di resistenza locale è

$$c(x) = 2 \frac{\nu}{u_\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u}{u_\infty} \right)_{y=0} = 3 \frac{\nu}{u_\infty \delta} = 3 \sqrt{\frac{13}{280} \frac{\nu}{u_\infty x}} \quad (4.29)$$

$$c(x) = 3 \sqrt{\frac{13}{280}} \frac{1}{Re_x^{1/2}} \simeq \frac{0.646}{Re_x^{1/2}} \quad (4.30)$$

Se è nota<sup>2</sup> la funzione  $u(x, y)$ , soluzione delle equazioni dello strato limite (caso laminare) oppure misurazione sperimentale (caso turbolento), è possibile calcolarsi sia lo spessore dello strato limite  $\delta(x)$  che il coefficiente di resistenza locale  $c_x$ . L'analisi di Blasius rivela che il risultato esatto è

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{4.96}{\sqrt{Re_x}} \quad (\text{esatta}) \quad (4.31)$$

$$c_x = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \quad (\text{esatta}) \quad (4.32)$$

Per calcolarsi la forza totale che agisce sulla superficie  $S$  si integra su tale superficie oppure, equivalentemente, si calcola il coefficiente medio

$$c_m = \frac{1}{L} \int_0^L c_x dx = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}} \quad (4.33)$$

#### 4.0.4 Strato limite turbolento

Dalla conoscenza della distribuzione di velocità<sup>3</sup> è immediato calcolarsi lo spessore dello strato limite (turbolento) ed il coefficiente di resistenza locale (turbolento). Ad esempio

$$c(x) = 0.0592 Re_x^{-1/5} \quad 5 \times 10^5 \leq Re_x \leq 10^7 \quad (\text{Schlichting}) \quad (4.34)$$

Analoghe relazioni possono essere determinate per altri range del numero di Reynolds locale. Lo sviluppo dello strato limite nella direzione del moto in tal caso si determina sperimentalmente. In precedenza abbiamo discusso lo strato limite turbolento in condizioni di regime completamente sviluppato. Qui si parla dello sviluppo di tale strato.

<sup>2</sup>Per il caso di strato limite laminare su lastra piana le equazioni dello strato limite sono risolte per approssimazione attraverso una rappresentazione polinomiale della soluzione.

<sup>3</sup>Abbiamo visto che nel caso di flusso turbolento la determinazione della distribuzione di velocità è di norma sperimentale.

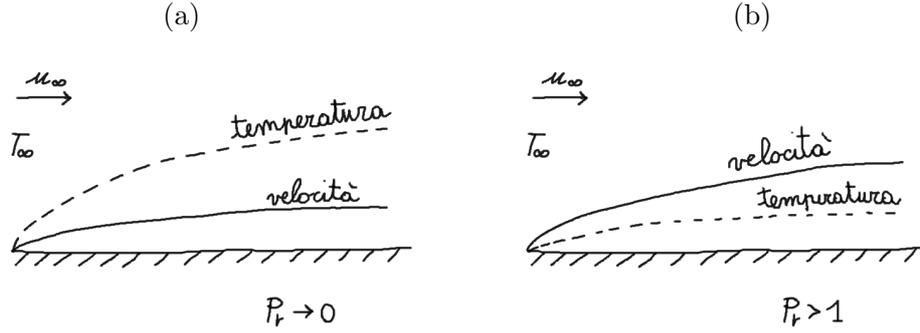


Figura 4.2: Strato limite laminare di velocità e temperatura per un metallo liquido (a) e per un fluido ordinario (b).

#### 4.1 Strato limite termico per flussi laminari su lastra piana

Noto il campo di velocità  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  è possibile (anche se non facile) determinare analiticamente (o sperimentalmente) soluzione della (4.3). Nota la distribuzione di temperatura adimensionale  $\theta(x, y)$  che corrisponde ad opportune condizioni al contorno, si può calcolare lo spessore dello strato limite termico  $\delta_T(x)$  ed il numero di Nusselt *locale*. Dipendentemente dal fatto che  $Pr \ll 1$  (metalli liquidi) o  $Pr > 1$ , si hanno situazioni differenti. In particolare uno strato limite termico di un metallo liquido si sviluppa molto rapidamente visto l'elevato valore della diffusività termica. L'equazione del calore che descrive lo strato limite termico laminare in *condizioni di temperatura di parete uniforme* è

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad \theta(x, t) = \frac{T(x, t) - T_w}{T_\infty - T_w} \quad (4.35)$$

ed essa può porsi in una forma integrale utilizzando esattamente gli stessi passaggi seguiti per ottenere la soluzione di von Kármán. Si ottiene

$$\boxed{\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T(x)} u(1 - \theta) dy = \alpha \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0}} \quad (4.36)$$

Anche in questo caso possiamo considerare una espansione del terzo ordine per la temperatura

$$\theta(x, y) = b_0(x) + b_1(x)y + b_2(x)y^2 + b_3(x)y^3 \quad (4.37)$$

In cui le funzioni  $b_0, \dots, b_3$  sono determinate dalle condizioni al contorno

$$\theta(x, 0) = 0, \quad \theta(x, \delta_T(x)) = 1, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=\delta_T} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0 \quad (4.38)$$

Troviamo esattamente la stessa espressione ottenuta per il campo di velocità cioè

$$\boxed{\theta(x, t) = \frac{3}{2} \left( \frac{y}{\delta_T(x)} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta_T(x)} \right)^3} \quad (4.39)$$

### 4.1.1 Metalli liquidi

Per metalli liquidi l'esperienza mostra che in prima approssimazione possiamo porre  $u = u_\infty$ ,  $v = 0$ . Non riportiamo l'analisi completa. In ogni caso la sequenza di passaggi è la stessa di quella seguita per risolvere lo strato limite di velocità. Si esplicita cioè la (4.36) ottenendo una equazione differenziale ordinaria per  $\delta_T(x)$ , che con la condizione  $\delta_T(0) = 0$  fornisce l'espressione dello strato limite termico.

$$\delta_T(x) = \sqrt{\frac{8\alpha x}{u_\infty}} \quad (4.40)$$

noto il quale abbiamo la soluzione  $\theta$  in forma esplicita. A questo punto possiamo calcolarci il numero di Nusselt locale (adimensionalizzando  $y$  con  $x$ )

$$Nu_x = x \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{3}{2\delta} x = \frac{3}{2\sqrt{8}} \sqrt{\frac{u_\infty x \nu}{\nu \alpha}} = \frac{3}{2\sqrt{8}} Pe_x^{1/2} \simeq 0.530 Pe_x^{1/2} \quad (4.41)$$

In realtà la formula che deriva da una analisi esatta è

$$Nu_x = 0.564 Pe_x^{1/2}, \quad Pe_x = \frac{u_\infty x}{\alpha} \quad (\text{esatta per } Pr \rightarrow 0) \quad (4.42)$$

### 4.1.2 Fluidi ordinari in presenza di contemporaneo sviluppo dello strato termico e dinamico

Anche in questo caso possiamo eseguire una analisi approssimata impiegando il metodo integrale. La differenza rispetto al caso di metallo liquido sta nel fatto che il numero di Prandtl è relativamente elevato in questo caso ( $Pr > 1$ ). Matematicamente procediamo risolvendo ancora una volta l'equazione integrale (4.36), questa volta impegnando la velocità (4.22). Nel caso in cui gli strati limite termico e dinamico inizino nello stesso punto, Si dimostra che il rapporto fra lo spessore dello strato limite termico e quello dinamico è

$$\Delta(x) = \frac{\delta_T(x)}{\delta(x)} = \left( \frac{13}{14Pr} \right)^{1/3} \quad (4.43)$$

che come si nota non dipende da  $x$ . Pertanto per assegnato fluido il rapporto fra lo strato limite termico dinamico e termico è inversamente proporzionale al numero di Prandtl. Ciò significa, ad esempio, che per l'aria i due strati limite hanno circa lo stesso spessore, per l'acqua quello termico sta sotto quello dinamico. Sostituendo l'espressione di  $\delta(x)$  troviamo

$$\delta_T(x) = 4.53 \frac{x}{Re^{1/2} Pr^{1/3}} \quad (4.44)$$

Noto  $\delta_T$ , possiamo calcolare l'espressione della temperatura adimensionale (4.39) ed il numero di Nusselt

$$Nu_x = 0.332 Pr^{1/3} Re_x^{1/2}, \quad Re_x < 5 \times 10^5 \quad 0.6 < Pr < 10 \quad (4.45)$$

Alternativamente possiamo ottenere questo risultato in modo molto diretto utilizzando l'analoga di Reynolds-Colburn

$$St_x Pr^{2/3} = \frac{c(x)}{2} \quad (4.46)$$

In cui  $St_x$  è il numero di Stanton locale,  $c(x)$  è il coefficiente di resistenza locale. Ricordando che per la lastra piana  $c(x) = 0.664 Re_x^{-1/2}$  abbiamo immediatamente

$$Nu_x = Re_x \frac{Pr}{Pr^{2/3}} \frac{0.332}{2} Re_x^{-1/2} = 0.664 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad (4.47)$$

### 4.1.3 Strato limite termico turbolento

Nel caso in cui si consideri lo strato limite termico turbolento l'esperienza mostra che possiamo ancora utilizzare l'equazione

$$\boxed{St_x Pr^{2/3} = \frac{c(x)}{2}, \quad St_x = \frac{Nu_x}{Re_x Pr} \quad (\text{numero di Stanton locale})} \quad (4.48)$$

nota come analogia di *Reynolds-Colburn*<sup>4</sup>. Tale espressione si può dimostrare in condizioni laminari molto semplicemente confrontando (4.45) con (4.32). Si è provato che l'analogia di Reynolds-Colburn è valida anche in condizioni turbolente (sempre per flussi su lastra piana). Ciò significa che è possibile determinare il Nusselt locale misurando il coefficiente di resistenza locale turbolento. Ad esempio usando (4.34) si ottiene

$$St_x Pr^{2/3} = 0.0296 Re_x^{-1/5}, \quad 5 \times 10^5 \leq Re_x \leq 10^7 \quad (4.49)$$

## 4.2 Flusso intorno ad un cilindro

Il coefficiente di resistenza globale<sup>5</sup> si ottiene per via sperimentale o numerica misurando la forza agente nella direzione della corrente indisturbata come

$$c_D = \frac{F}{LD} \frac{2}{\rho u_\infty^2} \quad (4.50)$$

Tale forza è una quantità dipendente dal tempo per  $Re > 60$ . In tali circostanze si calcola un valore medio della forza scegliendo un periodo adimensionale di integrazione sufficientemente maggiore dell'inverso del numero di Strouhal (che ricordiamo rappresenta la frequenza adimensionale principale del distacco dei vortici). Il numero di Nusselt locale sulla superficie del cilindro dipende dall'angolo rispetto al punto di stagnazione e viene determinato sperimentalmente. Stessa cosa può dirsi del numero di Nusselt medio che viene solitamente valutato impiegando la correlazione di Churchill-Bernstein, valida per  $10^2 < Re < 10^7$ ,  $Pe > 0.2$

$$Nu_m = 0.3 + \frac{0.62 Re^{1/2} Pr^{1/3}}{\left[1 + (0.4/Pr)^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5} \quad (4.51)$$

Nel campo  $Re = 20000 \div 400000$  tale correlazione sottostima lo scambio termico effettivo, pertanto in tale range si raccomanda di utilizzare

$$Nu_m = 0.3 + \frac{0.62 Re^{1/2} Pr^{1/3}}{\left[1 + (0.4/Pr)^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re}{282000}\right)^{1/2}\right] \quad (4.52)$$

<sup>4</sup>Tale analogia permette di determinare il numero di Nusselt locale misurando il coefficiente di resistenza locale sulla lastra piana in condizioni isoterme!. L'analogia vale purtroppo solo per flussi su lastra piana, ad esempio non vale per il flusso in un tubo cilindrico.

<sup>5</sup>Quello locale si determina analogamente considerando la tensione tangenziale alla parete.

### 4.3 Flusso intorno ad una sfera

Il caso della sfera è metodologicamente analogo a quello del cilindro. Abbiamo il coefficiente di resistenza

$$c_D = \frac{4F}{\pi D^2} \frac{2}{\rho u_\infty^2} \quad (4.53)$$

che va determinato per via numerica o sperimentale. Il numero di Nusselt medio possiamo valutarlo con la relazione di McAdams

$$Nu_m = 0.37 Re^{0.6} \quad 17 < Re < 7 \times 10^4 \quad (4.54)$$

oppure con la relazione di Whitaker

$$Nu_m = 2 + \left(0.4 Re^{1/2} + 0.06 Re^{2/3}\right) Pr^{2/5} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_w}\right)^{1/4} \quad (4.55)$$

valida nel campo  $3.5 < Re < 8 \times 10^4$ ,  $0.7 < Pr < 80$ ,  $1 < \mu_\infty/\mu_w < 380$  in cui  $\mu_\infty$  e  $\mu_w$  sono le viscosità dinamiche del fluido alla temperatura  $T_\infty$  ed alla temperatura di parete.

### 4.4 Trasformazioni conformi

Il metodo della trasformazione conforme è stato estensivamente studiato ed utilizzato dai fluidodinamici teorici del novecento (vd. M. Thompson, “Theoretical hydrodynamics”), soprattutto in campo aeronautico, dato che permetteva di avere informazioni sulla distribuzione di velocità intorno a corpi solidi complessi (profili alari) in modo relativamente semplice. Le trasformazioni conformi sono definite da funzioni complesse di variabile complessa che soddisfano alle condizioni di Cauchy-Riemann. L’applicazione alla fluidodinamica è limitata a moti bidimensionali (piani o a simmetria assiale) irrotazionali, isocori e stazionari. In tali condizioni infatti è facile mostrare che il potenziale della velocità e la funzione di corrente soddisfano proprio alle condizioni di Cauchy-Riemann, dunque permettono la definizione di una trasformazione conforme.

#### 4.4.1 Moti irrotazionali ed isocori

Vi sono molti risultati teorici che riguardano moti irrotazionali ed isocori. Ad esempio, si può dimostrare che un fluido perfetto che si trova in uno stato di moto irrotazionale permane in tale stato. Un altro risultato è dovuto a Lord Kelvin, il quale nel 1849 mostrò che per un dominio  $V$  con una prescritta distribuzione di velocità normale alla frontiera l’energia cinetica del fluido contenuto in  $V$  è *minima* se il fluido stesso è in uno stato di moto irrotazionale ed isocoro in  $V$ .

Nel 1876 Kirchhoff mostrò che *non può esistere un moto irrotazionale ed isocoro (esclusa la quiete) che soddisfa alla condizione di aderenza ad una parete solida*. Questo risultato è importante e lo dimostriamo. Se la velocità è irrotazionale allora esiste un potenziale  $\varphi$  tale che

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi \quad (4.56)$$

Inoltre dalla condizione di incomprimibilità  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  abbiamo che tale potenziale è armonico<sup>6</sup>, cioè

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (4.57)$$

Consideriamo ora l'energia cinetica del fluido

$$\int_V |\nabla \varphi|^2 dV = \int_V \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) dV = \int_S \varphi \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad (4.58)$$

Supponiamo che la superficie  $S$  sia costituita da parti in cui può fluire fluido e da alcune pareti solide. Chiaramente la condizione di incomprimibilità garantisce che gli integrali sulle parti in cui vi è flusso sono uguali ed opposti. Restano gli integrali sulle superfici solide. Se  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$  è nullo sulla superficie  $S$  allora

$$\int_V |\nabla \varphi|^2 dV = 0 \quad (4.59)$$

Poiché la funzione integranda è strettamente positiva, ciò significa che  $\varphi$  è una costante in tutto  $V$ . L'unico moto compatibile con questa condizione è la quiete.

#### 4.4.2 Moti piani irrotazionali ed isocori

Consideriamo coordinate cartesiane ortogonali  $(x, y)$  e rappresentiamo un campo di velocità irrotazionale ed isocoro utilizzando il potenziale di velocità e la funzione di corrente

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (4.60)$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.61)$$

Le condizioni

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.62)$$

sono note come *condizioni di Cauchy-Riemann* e da esse deduciamo che la funzione complessa di variabile complessa

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\Psi(x, y), \quad z = x + iy \quad (4.63)$$

è *olomorfa* e *analitica*. Olomorfa vuole dire che definisce una trasformazione conforme, analitica significa che può essere espansa in serie di Taylor in ogni punto del dominio. In pratica  $f(z)$  trasforma il piano  $(x, y)$  nel piano  $(\varphi, \Psi)$  conservando gli angoli fra due curve. Se valutiamo la divergenza dell'equazione di Navier-Stokes troviamo

$$\nabla^2 p = -\rho \left( \frac{v^2}{2} \right) \quad (4.64)$$

che permette di calcolare la pressione, noto il campo di velocità.

---

<sup>6</sup>Dalla teoria delle funzioni armoniche sappiamo che esse non possono avere punti di massimo o minimo assoluti o relativi all'interno del dominio. Stessa può dirsi anche per  $|\nabla \varphi|$ . Così  $\varphi$  e le sue derivate spaziali assumono i loro valori massimi e minimi sulla frontiera del dominio.

## 4.5 Alcuni esempi di trasformazioni conformi del piano

Anzitutto notiamo che i campi di velocità irrotazionali ed isocori possono essere sovrapposti per dare origine ad altri campi di velocità sempre irrotazionali ed isocori. Ciò vale il principio di sovrapposizione degli effetti.

### 4.5.1 Corrente uniforme indisturbata

La trasformazione che definisce una corrente indisturbata uniforme è

$$f(z) = U_\infty z \quad (4.65)$$

Infatti

$$f(z) = U_\infty (x + iy) = \varphi + i\Psi \quad \Rightarrow \quad \varphi = U_\infty x, \quad \Psi = U_\infty y \quad (4.66)$$

da cui

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = U_\infty \quad (4.67)$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad (4.68)$$

### 4.5.2 Corrente che investe un cilindro di raggio $R$

La trasformazione conforme che definisce un flusso irrotazionale, isocoro e stazionario intorno ad un cilindro è

$$f(z) = U_\infty \left( z - \frac{R^2}{z} \right) \quad (4.69)$$

Calcoliamoci il potenziale di velocità e la funzione di corrente corrispondenti a tale trasformazione.

$$\begin{aligned} f(z) &= U_\infty \left( x + iy - \frac{R^2}{x + iy} \right) \\ &= \frac{U_\infty}{x^2 + y^2} (x - iy) (x^2 + 2ixy - y^2 - R^2) \end{aligned} \quad (4.70)$$

Alla fine dei conti troviamo

$$\varphi = U_\infty \left( x - \frac{xR^2}{x^2 + y^2} \right), \quad \Psi = U_\infty \left( y + \frac{yR^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (4.71)$$

### 4.5.3 Vortice elementare e campo di moto intorno ad un cilindro rotante

La trasformazione conforme

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (4.72)$$

genera un vortice elementare puntiforme di intensità  $\Gamma$ . Ricordiamo che la funzione logaritmo di un numero complesso è definita come

$$\ln z = \ln |z| + i \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \quad (4.73)$$

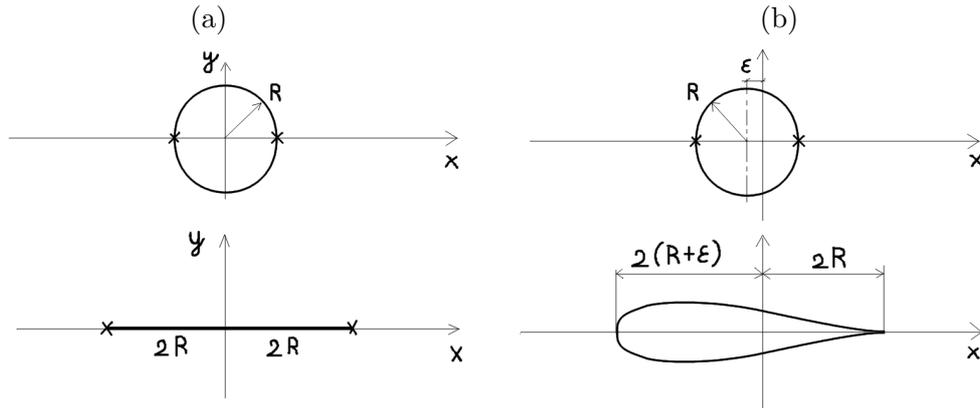


Figura 4.3: Profili alari di Joukowsky corrispondenti alla trasformazione (4.77) con  $b = R$

Utilizzando la trasformazione conforme del vortice elementare possiamo costruire il campo di velocità intorno ad un cilindro rotante semplicemente considerando

$$f(z) = U_\infty \left( z - \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (4.74)$$

#### 4.5.4 Profili alari di Joukowsky

Noto il campo di velocità intorno ad un cilindro possiamo eseguire una seconda trasformazione conforme considerando il numero complesso

$$z' = \varphi + i\Psi \quad (4.75)$$

trasformato da una seconda funzione olomorfa  $h$

$$h(z') = \phi' + i\Psi' \quad (4.76)$$

Per studiare le proprietà aerodinamiche di alcuni profili alari Joukowsky propose la trasformazione

$$h(z) = z + \frac{b^2}{z} \quad (\text{trasformazione di Joukowsky}) \quad (4.77)$$

In pratica tale trasformazione trasforma un cilindro in un altro oggetto. In funzione dello spostamento dell'asse del cilindro dall'origine degli assi possiamo avere diversi profili aerodinamici: simmetrici, asimmetrici. In figura 4.3 riportiamo alcuni esempi di trasformazione.

#### 4.5.5 Corrente che investe una sfera di raggio $R$

Anche un questo caso il campo di moto è bidimensionale dato si tratta di un moto a simmetria assiale. Per determinare la trasformazione conforme conviene lavorare in coordinate sferiche esprimendo le componenti gradiente lungo  $r$  e lungo  $\vartheta$ .

## Capitolo 5

# Convezione naturale

Si parla di convezione naturale se il moto di un fluido è determinato principalmente dall'azione delle forze di galleggiamento indotte da differenze di densità in un campo gravitazionale. Analogamente a quanto accade per il caso della convezione forzata, possiamo avere convezione naturale laminare o turbolenta. Il sistema di equazioni che descrive i fenomeni di convezione naturale in un fluido Newtoniano lo abbiamo già incontrato. Esso è costituito dall'equazione Navier-Stokes per un fluido comprimibile, dall'equazione di Fourier, dall'equazione di continuità e da una equazione di stato del fluido.

Nella loro forma completa queste equazioni costituiscono un sistema molto difficile da trattare sia analiticamente che numericamente. Pertanto sono state proposte delle approssimazioni. Una delle prime è dovuta a Boussinesq (1903 - "theorie analytique de la chaleur") e ce ne occupiamo nella prossima sezione.

### 5.1 L' approssimazione di Boussinesq

Per lo studio analitico e numerico della convezione naturale ci si riferisce solitamente all'approssimazione di Boussinesq. Benché tale approssimazione sia stata fortemente criticata da molti studiosi principalmente a causa della sua mancanza di rigore fisico-matematico, essa è ancora diffusamente utilizzata per la sua semplicità.

Secondo Boussinesq gli effetti delle forze di galleggiamento in un fluido Newtoniano ed incomprimibile possono essere previsti considerando una dipendenza della densità dalla temperatura esclusivamente nel termine che rappresenta la forza di massa dovuta al campo di gravità. Se la gravità è assente non esiste nessuna forza di galleggiamento. Pertanto ad esempio, una candela accesa all'interno di una navicella spaziale non presenta un pennacchio allungato come avviene sulla terra. Bensì il nucleo di fiamma ha forma sferica e non resta acceso a causa dell'assenza di moto di fluido<sup>1</sup>.

Studi recenti mostrano che la soluzione di un problema di convezione secondo l'approssimazione di Boussinesq può non essere unica. Ad esempio sono state identificate (numericamente) diverse soluzioni stazionarie (alcune stabili altre no) per un flusso a  $Ra = 10^4$  all'interno di una cavità cubica avente pareti orizzontali isoterme (quella sotto a temperatura maggiore di quella sopra) e pareti verticali adiabatiche. Sperimentalmente si è osservato che è possibile realizzare alcune delle soluzioni multiple previste dalla teoria.

---

<sup>1</sup>Una candela accesa all'interno di un sistema in caduta libera si comporta come nello spazio?. E in una navicella in accelerazione nello spazio la candela resta accesa?. Insomma, se accendo una candela il principio di equivalenza della relatività generale mi dice buonasera?.

La dipendenza della densità dalla temperatura viene normalmente esplicitata utilizzando il coefficiente di comprimibilità isobaro

$$\beta = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (5.1)$$

Se integriamo la precedente relazione lungo una isobara, da una certa temperatura di riferimento  $T_0$  ad un'altra temperatura otteniamo

$$\rho(T) = \rho(T_0) e^{-\int_{T_0}^T \beta(T) dT} \quad (5.2)$$

Nella pratica  $\beta$  è un parametro molto piccolo<sup>2</sup> ed inoltre esso varia molto poco negli intervalli di temperatura che si considerano normalmente. Pertanto ha senso sviluppare l'esponenziale in serie di potenze considerando  $\beta$  costante, ed arrestando lo sviluppo al primo ordine

$$\rho(T) = \rho(T_0) [1 + \beta(T_0 - T)] \quad (5.4)$$

### 5.1.1 Equazioni di Boussinesq in coordinate cartesiane ortogonali

Consideriamo ora le equazioni di Navier-Stokes e di Fourier per un fluido incomprimibile avente densità  $\rho_0 = \rho(T_0)$ , ed esplicitiamo le equazioni di Boussinesq in coordinate cartesiane ortogonali in cui  $z$  è un asse verticale ascendente. Otteniamo le componenti fisiche

$$\rho_0 \frac{\delta v_x}{\delta t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (5.5)$$

$$\rho_0 \frac{\delta v_y}{\delta t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \quad (5.6)$$

$$\rho_0 \frac{\delta v_z}{\delta t} = \rho_0 g \beta [(T - T_0)] - \rho_0 g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (5.7)$$

Conviene definire un carico piezometrico  $p + \rho_0 g z$  che per economia di notazione indichiamo sempre con  $p$ . Adimensionalizziamo le equazioni utilizzando la base dimensionale<sup>3</sup>  $U, \rho_0, \Delta T, L$ . In notazione operatoriale otteniamo

$$\boxed{\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} = \frac{Gr}{Re^2} \theta \hat{\mathbf{k}} - \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v}} \quad (5.9)$$

<sup>2</sup>Ad esempio, per un gas perfetto a temperatura ambiente:

$$\beta = \frac{1}{T_{amb}} = \frac{1}{293.15} = 0.0034 \text{ K}^{-1} \quad (5.3)$$

Per l'acqua è ancora minore, dell'ordine di  $10^{-4} \text{ K}^{-1}$ .

<sup>3</sup>Per dimostrare che si tratta di una base dimensionale è sufficiente provare che il determinante delle dimensioni di  $U, L, \Delta T, \rho_0$  rispetto a  $[MLT\Theta]$  è non nullo. Ciò che è possibile ottenere in modo univoco tale base dimensionale combinando opportunamente le unità di misura del sistema internazionale. La matrice delle dimensioni di  $UL\Delta T\rho_0$  rispetto a  $[MLT\Theta]$  è

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(d) = 1 \quad (5.8)$$

in cui  $\hat{\mathbf{k}}$  è un versore verticale ascendente e tutte le quantità sono ora adimensionali<sup>4</sup>. Con la stessa base dimensionale otteniamo la seguente forma adimensionale dell'equazione di Fourier

$$\boxed{\frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{1}{RePr} \nabla^2 \theta} \quad (5.11)$$

e l'equazione di continuità

$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0} \quad (5.12)$$

avendo trascurato la generazione di calore  $q_g$  e la dissipazione viscosa  $\mathcal{D} = 2\mu e^{ij} e_{ij}$ . I raggruppamenti adimensionali che compaiono nelle relazioni (5.9) e (5.11) sono

$$Gr = \frac{g\beta L^3 \Delta T}{\nu^2}, \quad Re = \frac{UL}{\nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (5.13)$$

Dunque il problema di Boussinesq adimensionalizzato dipende da soli 3 raggruppamenti adimensionali. Questa circostanza ci porta a postulare (ed il teorema  $\pi$  lo conferma) che anche le proprietà di scambio termico adimensionalizzato cioè il numero di Nusselt si può esprimere attraverso tali raggruppamenti. Avremo pertanto un numero di Nusselt *locale* esprimibile in termini di Grashof locale, Reynolds locale e Prandtl. Analogamente avremo un numero di Nusselt medio esprimibile in termini di Grashof medio, Reynolds medio e Prandtl medio.

Nel caso in cui si tratti di convezione naturale pura, è buona cosa esprimere il numero di Reynolds in funzione del numero di Grashof e/o del numero di Prandtl. Ciò equivale a scalare le forze di inerzia del moto del fluido in funzione delle forze di galleggiamento. Scelte molto utilizzate sono:  $Re = 1/Pr$  per problemi di transizione da conduzione a convezione;  $Re = \sqrt{Ra}/Pr$  per problemi di convezione naturale turbolenta.

### 5.1.2 Equazioni di Boussinesq in coordinate cilindriche

Nel caso in cui si considerino coordinate curvilinee arbitrarie il vettore *controvariante*<sup>5</sup> del campo gravitazionale  $\mathbf{g}$  avrà delle componenti fisiche lungo più direzioni. Ad esempio se studiamo la convezione naturale in un tubo orizzontale impiegando coordinate cilindriche (con l'asse  $z$  diretto lungo il tubo) si avranno le seguenti componenti fisiche

$$g_r = -g \sin \phi \quad (5.15)$$

$$g_\phi = -g \cos \phi \quad (5.16)$$

$$g_z = 0 \quad (5.17)$$

---

<sup>4</sup>In particolare

$$p = \frac{p_s}{\rho_0 U^2}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{\Delta T_{\text{ref}}}, \quad t = t^* \frac{U}{L}, \quad \text{ecc...} \quad (5.10)$$

<sup>5</sup>Si tratta di vettore controvariante dato che può essere definito dall'accelerazione di un grave in caduta libera

$$\mathbf{g} := \frac{dv_z}{dt} \quad (5.14)$$

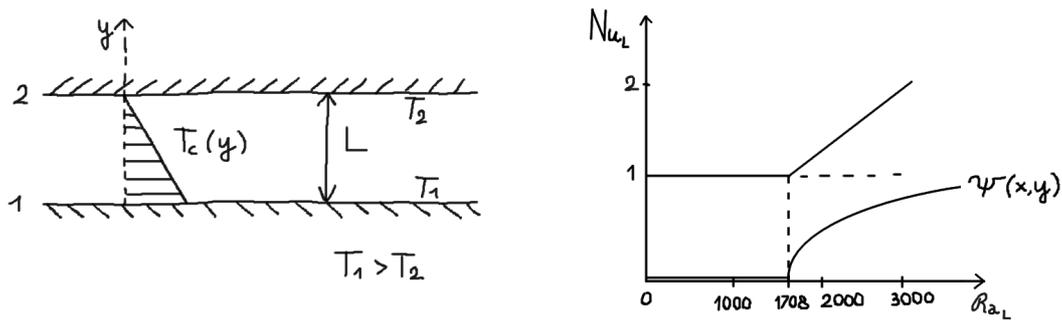


Figura 5.1: Problema di Rayleigh-Bénard. Il numero di Rayleigh critico che individua la transizione dal regime di conduzione pura a quello di convezione è  $Ra_c = 1708$ . Tale transizione (biforcazione a forchetta) non dipende dal numero di Prandtl.

Pertanto in coordinate cilindriche le equazioni Navier-Stokes nell'approssimazione di Boussinesq assumono la forma

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi \right) + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{Gr}{Re^2} \theta \sin \phi - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} = \frac{Gr}{Re^2} \theta \cos \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2} \right) \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (5.20)$$

## 5.2 Convezione naturale fra piani paralleli

Questo problema è noto come problema di Rayleigh-Bénard. La geometria è illustrata in figura 5.1. Fra due piastre infinite piane e parallele mantenute a temperatura costante  $T_1 > T_2$  vi è un fluido avente proprietà termofisiche note. In assenza di fenomeni convettivi, la distribuzione di temperatura è  $T(y) = T_2 - (T_1 - T_2)y/L$  (conduzione pura). In termini adimensionali se consideriamo la lunghezza caratteristica  $L$  e la differenza di temperatura di riferimento  $\Delta T_{rif} = (T_1 - T_2)$  abbiamo

$$\theta = 1 - y \quad (5.21)$$

Il numero di Nusselt che caratterizza lo scambio di calore fra una qualunque parete piana ed il fluido è

$$Nu = \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{\text{parete}} = 1 \quad (5.22)$$

Ricordiamo che  $Nu = 1$  significa appunto conduzione pura. Le equazioni di Boussinesq che descrivono uno stato stazionario bidimensionale (conduttivo o convettivo) sono

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5.23)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{Gr}{Re^2} \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.25)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (5.26)$$

### 5.2.1 Determinazione della transizione conduzione/convezione

Trattandosi di uno stato bidimensionale possiamo ricorrere alla formulazione vorticità-funzione di corrente. Questa formulazione ha il vantaggio di soddisfare automaticamente l'equazione di continuità e di ridurre l'equazione di Navier-Stokes ad una sola equazione scalare. Infatti dall'equazione di continuità si deduce l'esistenza di una funzione  $\Psi(x, y)$  tale che

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (5.27)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (5.28)$$

L'equazione di Navier-Stokes nella formulazione vorticità-funzione di corrente e nell'approssimazione di Boussinesq è<sup>6</sup>

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial (\nabla^2 \Psi)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial (\nabla^2 \Psi)}{\partial y} = -Pr \nabla^4 \Psi + Pr Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \nabla^2 \theta \quad (5.33)$$

<sup>6</sup>L'equazione di vorticità per un flusso incomprimibile è

$$\frac{\delta \mathbf{w}}{\delta t} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{Gr}{Re^2} \nabla \times (\theta \hat{\mathbf{j}}) \quad (5.29)$$

ove  $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u}$ . Per un flusso bidimensionale abbiamo solo la componente ortogonale al piano del moto  $\mathbf{w} = w \hat{\mathbf{k}}$ , pertanto  $(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0$ . Inoltre  $\nabla \times (\theta \hat{\mathbf{j}}) = \frac{\partial \theta}{\partial x} \hat{\mathbf{k}}$ . Scaliamo le forze d'inerzia utilizzando il numero di Prandtl ponendo  $Re = 1/Pr$

$$\boxed{\frac{\delta w}{\delta t} = Pr \nabla^2 w + Ra Pr \frac{\partial \theta}{\partial x}} \quad (5.30)$$

Infine, impiegando la funzione di corrente  $u = \partial \Psi / \partial y$ ,  $v = -\partial \Psi / \partial x$  abbiamo  $w = -\nabla^2 \Psi$ . Pertanto

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial (\nabla^2 \Psi)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial (\nabla^2 \Psi)}{\partial y} = -Pr \nabla^4 \Psi + Ra Pr \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (5.31)$$

che corrisponde alla (5.32).

Nell'intorno di una condizione stazionaria di moto nullo, possiamo trascurare i termini quadratici in  $\Psi$  (in pratica linearizziamo il problema) ottenendo le equazioni

$$\nabla^4 \Psi = Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \nabla^2 \theta \quad (5.35)$$

in cui appare evidente che il problema di stabilità (transizione conduzione-convezione) dipende solo dal numero di Rayleigh. Inoltre sostituendo la prima nella seconda abbiamo una ulteriore semplificazione di termini quadratici in  $\Psi$

$$\nabla^4 \Psi = Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (5.36)$$

$$\nabla^2 \theta = 0 \quad (5.37)$$

A questo punto il problema è disaccoppiato. Risolvendo il problema  $\nabla^2 \theta = 0$  fra le piastre parallele troviamo  $\theta(x, y)$ . Se sostituiamo tale soluzione nella prima abbiamo

$$\boxed{\nabla^4 \Psi = Ra f(x, y)} \quad (5.38)$$

Probabilmente si riesce a trasformare il tutto in un problema agli autovalori.

### 5.3 Convezione naturale in cavità rettangolare

Se si considera una cavità quadrata finita è possibile e conveniente impiegare il metodo della trasformata integrale di R. M. Cotta per ottenere delle soluzioni semianalitiche del problema. Questo metodo utilizza le autofunzioni di un operatore biarmonico

$$\frac{\partial^4 g}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 g}{\partial y^4} = \lambda g \quad (5.39)$$

Infatti le autofunzioni di un operatore del quarto ordine sono in grado di rappresentare la funzione di corrente di un campo di velocità che aderisce alle pareti solide. Il problema (5.39) ammette una separazione di variabili nella forma  $g(x, y) = X(x)Y(y)$  e può essere suddiviso sottoproblemi nella forma

$$\frac{d^4 X}{dx^4} = aX \quad (5.40)$$

Attraverso una trasformata integrale che impiega tali autofunzioni per la funzione di corrente e classici seni e coseni per la temperatura, si può eliminare la variabile  $x$  oppure la  $y$  nel sistema (5.32)-(5.33). In tal modo resta da risolvere un sistema di equazioni differenziali ordinarie che può essere integrato al calcolatore.

### 5.4 Convezione naturale su lastra piana verticale

Per un problema di convezione naturale su lastra piana in uno spazio semi-infinito le equazioni di Boussinesq possono essere semplificate ulteriormente impiegando approssimazione dello strato limite. In tale approssimazione al solito si trascurano:

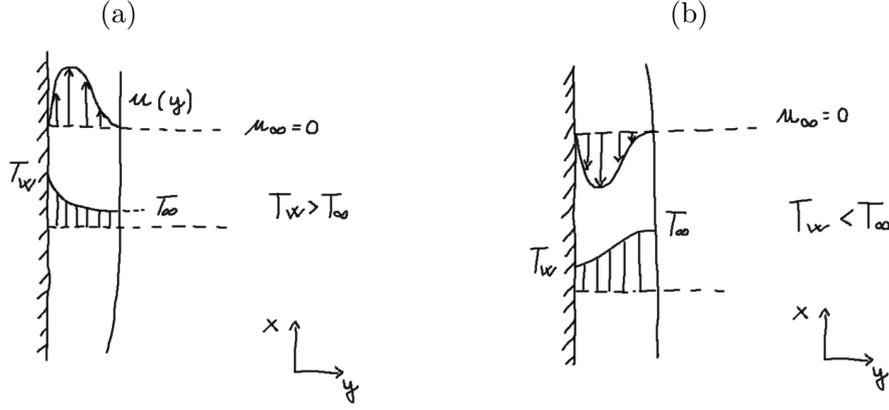


Figura 5.2: Convezione naturale su parete piana verticale, nell'approssimazione dello strato limite: (a) flusso ascendente ( $T_w > T_\infty$ ); (a) flusso discendente ( $T_w < T_\infty$ )

- il gradiente di pressione nella direzione del moto;
- la derivate seconda della velocità nella direzione del moto;
- la derivate seconda della temperatura nella direzione del moto;

Le equazioni dello strato limite che si ottengono sono

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.41)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.42)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5.43)$$

L'unica differenza rispetto alle equazioni dello strato limite per la convezione laminare forzata è la presenza del termine di galleggiamento  $g\beta(T - T_\infty)$ . Possiamo tuttavia nuovamente applicare la formulazione integrale proposta da von Kármán per determinare la soluzione dello strato limite laminare su lastra piana.

Seguendo passaggi analoghi a quelli fatti nella sezione §4.0.3 (in questo caso però  $u_\infty = 0$ ) possiamo ricavare la seguente formulazione integrale nello strato limite per l'equazione di Boussinesq

$$\frac{d}{dx} \left( \int_0^\delta u^2 dy \right) = -\nu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} + g\beta \int_0^\delta (T - T_0) dy \quad (5.44)$$

e per quella del calore

$$\frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta_T} u(T - T_\infty) dy \right) = -\alpha \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (5.45)$$

Una soluzione analitica approssimata di queste equazioni si avvale di una rappresentazione polinomiale della velocità e della temperatura, ad esempio

$$u(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + a_3(x)y^3 \quad (5.46)$$

$$T(x, y) = b_0(x) + b_1(x)y + b_2(x)y^2 + b_3(x)y^3 \quad (5.47)$$

in cui le funzioni  $a_0, \dots, a_3, b_0, \dots, b_3$  sono determinate da opportune condizioni al contorno. È facile determinare che la rappresentazione polinomiale della velocità dipende dalla rappresentazione di temperatura. In effetti si tratta di un problema di convezione naturale pura per cui la velocità è determinata dalla temperatura. La soluzione è più complicata dei casi che abbiamo illustrato in precedenza per la convezione forzata.

#### 5.4.1 Nusselt locale e Nusselt medio

Dipendentemente dalle modalità con cui viene scaldata la lastra (lastra isoterma o con flusso di calore imposto) possiamo avere differenti correlazioni. Ad esempio per lo scambio termico medio su lastra piana verticale *isoterma* impieghiamo la correlazione di Churchill-Chu, valida per  $10^{-1} < Ra_L < 10^9$

$$Nu_m = 0.68 + \frac{0.67 Ra_L^{1/4}}{\left[1 + (0.492/Pr)^{9/16}\right]^{4/9}} \quad (5.48)$$

ove l'adimensionalizzazione impiega l'altezza della lastra  $L$ .

### 5.5 Convezione naturale su lastra piana orizzontale

Anche questo problema è molto difficile da trattare analiticamente. Generalmente la lunghezza caratteristica è definita come area/perimetro

$$L = \frac{S}{\mathcal{P}} \quad (5.49)$$

Per lastre isoterme orizzontali (con faccia calda rivolta verso l'alto) abbiamo

$$Nu_m = 0.54 Ra_L^{1/4} \quad 10^5 < Ra_L < 2 \times 10^7 \quad (\text{convezione laminare}) \quad (5.50)$$

$$Nu_m = 0.14 Ra_L^{1/3} \quad 10^7 < Ra_L < 3 \times 10^{10} \quad (\text{convezione turbolenta}) \quad (5.51)$$

## Capitolo 6

# Conduzione di calore

La conduzione è il meccanismo secondo cui avviene lo scambio di calore nei solidi o nei fluidi a riposo. Il flusso di calore non può essere misurato direttamente ma il concetto di flusso di calore ha significato fisico poiché viene posto in relazione a variazioni di temperatura. La scienza della conduzione del calore si occupa principalmente della determinazione della distribuzione di temperatura nei solidi. L'equazione fondamentale è

$$\rho c_p \frac{\delta T}{\delta t} = \mathcal{D} - q_{;m}^m + q_g + \beta T \frac{\delta p}{\delta t} \quad (6.1)$$

in cui  $\mathcal{D} = e_{ij} P^{ij}$  è la dissipazione mentre  $\beta$  è la comprimibilità isobara.

Se il solido è indeformabile il tensore delle velocità di deformazione  $e_{ij}$  è ovviamente nullo<sup>1</sup>. Pertanto il tensore degli sforzi viscosi  $P^{ij}$  non compie alcun lavoro, cioè non abbiamo una dissipazione ( $\mathcal{D} = 0$ ). Inoltre un solido indeformabile ha comprimibilità isobara  $\beta$  nulla<sup>2</sup>. Pertanto nello studio dei fenomeni di conduzione nei solidi ci si riferisce normalmente all'equazione semplificata

$$\boxed{\rho c_p \frac{\delta T}{\delta t} = -q_{;m}^m + q_g} \quad (6.3)$$

### 6.1 Conduzione Fourieriana

La legge fondamentale (basata su osservazioni sperimentali) che fornisce la relazione fra il flusso di calore e la distribuzione di temperatura è

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad [k] = \text{W}/(\text{m}^2 \text{K}) \quad (6.4)$$

In coordinate generali il vettore  $\mathbf{q}$  (covariante per definizione) ha le seguenti componenti fisiche

$$q(i) = -k \sqrt{g_{ii}} g^{ik} \frac{\partial T}{\partial \eta^k} \quad (\text{non sommare su } i) \quad (6.5)$$

---

<sup>1</sup>L'atto di moto più generale di un corpo solido indeformabile (corpo rigido) è una rototraslazione, che ovviamente non esibisce nessuna deformazione. È opportuno osservare che anche per solidi perfettamente elastici abbiamo  $\mathcal{D} = 0$ , essendo in questo caso  $P_{ij} = 0$ .

<sup>2</sup>Ricordiamo che la comprimibilità isobara è definita come:

$$\beta = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (6.2)$$

dalla quale, se  $v = \text{cost}$ , otteniamo  $\beta = 0$ .

Ad esempio in coordinate cilindriche abbiamo

$$q(r) = -k \frac{\partial T}{\partial r} \quad (6.6)$$

$$q(\phi) = -k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \quad (6.7)$$

$$q(z) = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (6.8)$$

Per materiali *anisotropi* la conduttività termica è un tensore simmetrico del secondo ordine e la legge di Fourier si scrive come

$$q^i = -k^{ij} T_{,j} \quad (6.9)$$

in cui  $q^i$  sono le componenti tensoriali della densità di flusso termico. In generale la conduttività termica è una funzione della temperatura del materiale. Nel caso di materiali *non-omogenei* essa può essere anche funzione diretta della specifico punto considerato. Ovviamente una conduttività dipendente dalla temperatura è già una forma non omogenea. Il tensore delle conduttività  $k^{ij}$  può essere *localmente* diagonalizzato. Questa diagonalizzazione locale individua un sistema di coordinate curvilineo, eventualmente in moto, rispetto al quale  $k^{ij}$  è sempre in forma diagonale. Scriversi l'equazione di Fourier in tale sistema (funzionale della soluzione) complica l'equazione stessa, ma può aiutare comprendere meglio alcuni fenomeni che in apparenza non sono espliciti.

Esempi concreti di materiali *anisotropi* sono i cristalli, il legno, le rocce sedimentarie ed anche i metalli che hanno subito forti deformazioni plastiche in direzioni preferenziali. Tali deformazioni infatti sono in grado di orientare i grani della struttura in una certa direzione facendo in assomigliare, in un certo senso, la microstruttura eterogenea un metallo a quella di un grande monocristallo. La conduzione anisotropa ha importanti applicazioni in vari settori dell'ingegneria. Il meccanismo microscopico che favorisce la propagazione del calore è differente per solidi, liquidi e gas. La fisica dello stato solido si occupa della conduzione nei solidi. La meccanica statistica/quantistica della conduzione nei gas e nei liquidi.

**Conduzione termica dei solidi** La propagazione del calore nei solidi omogenei a struttura cristallina è dovuta principalmente alla sovrapposizione di due fenomeni: *vibrazioni reticolari* e *moto di elettroni liberi*. La “vibrazione reticolare” si propaga come un'onda nel reticolo cristallino e la particella quantistica associata a quest'onda viene detta *fonone*. Il moto di elettroni contribuisce alla conduzione dato che essi sono portatori di carica e di energia. Per metalli a temperatura ambiente la quantità di calore trasportata dal moto degli elettroni del metallo è due ordini di grandezza superiore a quella trasportata dai fononi. Per tale motivo i metalli ad elevata conduttività elettrica sono anche ottimi conduttori di calore (ad esempio, rame ed argento). In solidi non metallici privi di struttura cristallina il meccanismo della propagazione del calore non è inquadrabile chiaramente come nel caso dei solidi metallici. Ad esempio si ha convezione naturale nelle inclusioni d'aria, conduzione lungo eventuali microfibre metalliche ecc.. ecc...

**Conduzione termica dei liquidi e nei gas** La trasmissione del calore per conduzione nei gas avviene per dinamica molecolare microscopica, dunque un trasporto di energia cinetica. Nella teoria del continuo, a questo trasporto di energia cinetica non è associato alcun moto di elementi fluidi. Il valore della conduttività termica di un gas dipende quasi

esclusivamente dalla temperatura. Inoltre la misura della conduttività in un fluido è una questione abbastanza delicata.

### 6.1.1 Implicazioni del secondo principio della termodinamica per i fenomeni di conduzione Fourieriana

Ricordiamo che in assenza di fenomeni di generazione di calore interna la forma generale dell'equazione dell'entropia è

$$\rho \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{\mathcal{D}}{T} - \left( \frac{q^j}{T} \right)_{;j} + \frac{q^j}{T^2} T_{;j} \quad (6.10)$$

Per un solido indeformabile ( $e_{ij} = 0$ ) ed in quiete relativamente al sistema di coordinate tale equazione si specializza nella

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} = - \left( \frac{q^j}{T} \right)_{;j} + \frac{q^j}{T^2} T_{;j} \quad (6.11)$$

Ricordiamo inoltre che il secondo principio della termodinamica stabilisce che l'incremento di entropia di una certa regione di spazio non può essere inferiore al flusso di entropia che ha attraversato la superficie delimitante il contorno della stessa regione. Dall'integrazione di (6.11) in un volume arbitrario di solido deduciamo che tale condizione equivale a

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} \geq - \left( \frac{q^j}{T} \right)_{;j} \quad (6.12)$$

Sostituendo quest'ultima disuguaglianza nell'equazione dell'entropia (6.11) troviamo l'espressione del *secondo principio della termodinamica* per i fenomeni di conduzione nei solidi

$$\boxed{q^j T_{;j} \leq 0} \quad (6.13)$$

che possiamo così formulare: *la proiezione del flusso di calore sul gradiente di temperatura deve essere sempre negativa o al più nulla nel caso isoentropico*. Se consideriamo la legge di Fourier per un solido isotropo ed omogeneo la (6.13) si specializza nella

$$-k g^{ij} T_{;i} T_{;j} \leq 0 \quad (6.14)$$

che risulta essere verificata solo se  $k \geq 0$ . Dunque il secondo principio della termodinamica impone che la conduttività termica sia una quantità positiva. Questa conclusione è del tutto equivalente al *postulato di Clausius*<sup>3</sup>. Inoltre notiamo come ogni fenomeno di conduzione Fourieriana sia necessariamente non isoentropico (si ha un processo isoentropico solo se  $k = 0$ ). Per fenomeni di conduzione *anisotropi*, deduciamo

$$-k^{ij} T_{;i} T_{;j} \leq 0 \quad (6.15)$$

che, per una arbitraria distribuzione di temperatura, ci dice che il tensore della conduttività termica è *definito positivo*.

Materiali	$k_e$
argento	415 W/(m K)
acciaio	70 W/(m K)
vetro	7 W/(m K)
mattone	0.9 W/(m K)
acqua (liquida)	0.6 W/(m K)
olio motore	0.2 W/(m K)
aria	0.025 W/(m K)

Tabella 6.1: Valori medi per la conduttività termica equivalente a temperatura ambiente.

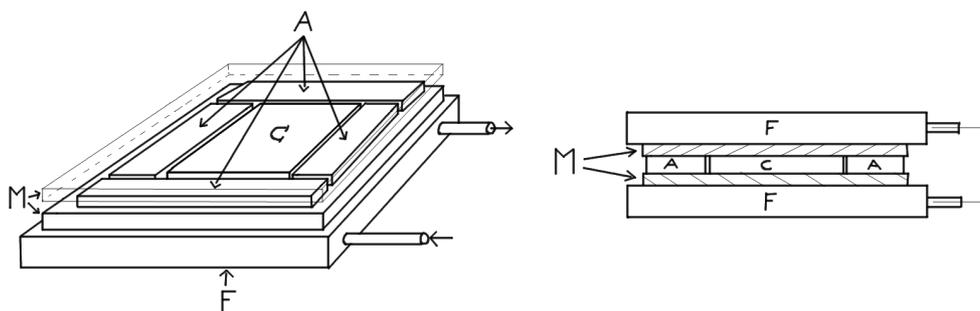


Figura 6.1: Schema dell'apparato sperimentale per la determinazione della conduttività termica. L'apparato comprende: due piastre fredde  $F$ ; due lastre di materiale di prova  $M$ ; una piastra calda  $C$ ; un anello di guardia  $A$  composto da quattro elementi, mantenuti alla temperatura della piastra calda  $C$

### 6.1.2 Misura della conduttività e della diffusività termica

La conduttività termica, dipende oltre che dalla natura del materiale, dallo stato di aggregazione (solido, liquido, gas), dalla temperatura e dalla pressione. Per un certa specie chimica, ad esempio acqua, la conduttività termica è solitamente maggiore nello stato solido e decresce passando allo stato liquido e allo stato gassoso. La dipendenza dalla pressione è del tutto irrilevante per i solidi, per i liquidi e per i gas a pressione ridotta elevata. La gran parte dei materiali ingegneristici *non* è omogenea, e spesso neppure isotropa. Ci si definisce spesso una conduttività *equivalente*  $k_e$ , intesa come valore medio spaziale di una conduttività che localmente può essere molto irregolare. I materiali *isolanti* sono materiali (di norma solidi) caratterizzati da un valore molto basso di conduttività equivalente. Il valore molto basso della conduttività è spesso dovuto ad inclusioni di aria ( $k_e = 0.025$  W/(m K)). Alcuni esempi sono: polistirolo, poliuretano espanso, lana di vetro, lana di roccia, sughero.

**Misura della conduttività termica equivalente in solidi non metallici** La procedura sperimentale maggiormente utilizzata per la determinazione della conduttività termica di materiali solidi non metallici (che possono essere confezionati in lastre piane di

<sup>3</sup>È impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia un passaggio di calore da un corpo ad una data temperatura ad un altro a temperatura più alta.

dimensioni opportune) è quella che utilizza la “piastra calda con anello di guardia<sup>4</sup>”. In condizioni stazionarie, dalla misura della potenza erogata dalla piastra calda  $W$  e dalla misura delle temperature sulle due facce dei provini (lato piastra calda caldo e lato piastra fredda) si risale ad una conduttività termica equivalente (media fra  $t_1$  e  $t_2$ ) utilizzando la relazione

$$Q = \frac{W}{2} = S \frac{k_e}{s} (t_2 - t_1) \quad (6.16)$$

in cui  $S$  è la superficie della piastra calda ed  $s$  è lo spessore dei provini. In pratica viene fornita potenza alla piastra calda, ad esempio attraverso uno scambiatore a tubi che prende acqua da un bagno termostatico. Analogamente viene sottratta potenza dalle piastre fredde, con lo stesso meccanismo. Se il sistema è fatto bene, la somma delle potenze alle piastre fredde eguaglia quella sulla piastra calda. In tal caso siamo sicuri che  $W/2$  ha attraversato le due lastre di prova. Dunque dalla misura delle temperature superficiali dei provini risaliamo alla conduttività.

Occorre stare attenti a dove vengono posizionate le termocoppie di misura per  $t_1$  e  $t_2$ . Solitamente esse vengono poste sulla piastra calda e su quella fredda. In tal modo non occorre strumentare ogni provino che si mette dentro. Tuttavia, come vedremo, è possibile che si presentino delle *conduttanze di contatto* che rendono differente il valore di temperatura sulla superficie della piastra calda e del provino. La conduttanza di contatto è imputabile principalmente a parametri di natura geometrica delle superfici: rugosità superficiale, errori di complanarità, ecc. Le parti di superficie che non sono in mutuo contatto sono separate da intercapedini di aria avente bassa conduttività, dunque elevata resistenza termica. Pertanto all’interfaccia è possibile avere, una caduta di temperatura apprezzabile. Per limitare gli effetti della conduttanza di contatto occorre eseguire la prova di conducibilità per tempi lunghi ed in ambienti in cui non vi sia circolazione di aria. Così facendo l’eventuale aria interposta fra le superfici raggiunge la loro temperatura in tempi più o meno lunghi. Nota la conduttività termica possiamo calcolarci la diffusività termica  $\alpha = k/\rho c_p$ . Alternativamente possiamo misurare direttamente la diffusività termica impiegando un transitorio di temperatura controllato.

**Misura della conduttività termica nei liquidi e nei gas** La misura è molto delicata dato che è molto facile innescare altre modalità di trasporto di calore, in particolare la convezione. Ad esempio se si volesse misurare la conduttività termica dell’acqua misurando il flusso termico fra due piani paralleli idealmente infiniti occorre fare molta attenzione a non superare il valore  $Ra_c = 1708$ , per non incorrere nella convezione naturale.

### 6.1.3 Equazione dello scambio termico per solidi indeformabili ed a riposo relativamente al sistema di coordinate

Consideriamo solidi indeformabili ed a riposo relativamente al nostro sistema di coordinate generali. La derivazione intrinseca allora è una semplice derivata parziale rispetto al tempo e l’equazione generale del calore si specializza nella

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -q_{;m}^m + q_g \quad (6.17)$$

---

<sup>4</sup>L’anello di guardia serve ad assicurare che il flusso di calore trasferito dalla piastra calda a quella fredda sia ortogonale alle superfici dei provini interposti.

Impiegando la legge costitutiva di Fourier (6.4) otteniamo

$$\begin{aligned}\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} &= (k g^{mi} T_{;i})_{;m} + q_g \\ &= g^{mi} (k T_{;i})_{;m} + q_g\end{aligned}\quad (6.18)$$

Nell'ipotesi di conduttività omogenea<sup>5</sup>  $g^{mi} (k T_{;i})_{;m} = k g^{im} T_{;im} = k \nabla^2 T$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + q_g \quad (6.19)$$

Dividendo per la costante  $\rho c_p$  e trascurando i fenomeni di generazione di calore

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 T \quad (6.20)$$

Il parametro

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (6.21)$$

si dice *diffusività termica* ed è collegato alla velocità con cui si propaga un'onda termica in un solido. Tanto più elevata è la diffusività tanto più velocemente una disuniformità della temperatura nello spazio viene trasferita da un punto all'altro attraverso un transitorio.

**Osservazione** Per onda termica non intendiamo la velocità con cui ogni punto del dominio viene a sapere se da qualche parte vi è stata una variazione di temperatura. La natura *parabolica* dell'equazione del calore infatti implica che la velocità di propagazione della perturbazione di temperatura sia infinita, cioè la teoria della condizione Fourieriana è una teoria di campo *non-locale* (vd. §6.4). Una perturbazione non si propaga dunque secondo un'onda, ma influenza istantaneamente tutti i punti del dominio, vicini o lontani che siano. La diffusività termica caratterizza il tempo necessario affinché la temperatura raggiunga un valore prefissato ad una distanza fissata dal punto in cui è avvenuta la perturbazione. Materiali molto conduttivi hanno normalmente elevata diffusività.

#### 6.1.4 Adimensionalizzazione dell'equazione della conduzione per solidi indeformabili a riposo rispetto al sistema di coordinate

Per adimensionalizzare l'equazione della conduzione termica abbiamo bisogno di una base dimensionale. Le grandezze fisiche che compaiono nell'equazione sono: massa, lunghezza, tempo e temperatura. Se utilizziamo la forma in cui compare la diffusività termica allora restano solo lunghezza, tempo e temperatura. Scegliamo come base dimensionale  $L$ ,  $\alpha$  e  $\Delta T_{\text{rif}}$ . È facile ottenere le seguenti grandezze adimensionali

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \nabla^2 \theta \quad (6.22)$$

in cui il tempo adimensionalizzato

$$Fo = t \frac{\alpha}{L^2} \quad (6.23)$$

---

<sup>5</sup>Una conduttività dipendente dalla temperatura non è omogenea, dato che dipende appunto dal valore locale di temperatura.

si dice *numero di Fourier* ed è impiegato come variabile adimensionalizzata nei diagrammi dei transitori di temperatura. Fisicamente tale numero rappresenta il rapporto fra il flusso di calore per conduzione rispetto a al flusso di calore che si “accumula” nel solido

$$Fo = \frac{k(1/L)L^2}{\rho c_p L^3/t} \quad (6.24)$$

### 6.1.5 Conduzione non stazionaria in coordinate cartesiane, cilindriche e sferiche

Utilizzando gli strumenti del calcolo tensoriale possiamo ottenere in modo molto rapido l'espressione della equazione di Fourier in coordinate arbitrarie. A tal fine è sufficiente esplicitare il Laplaciano nel sistema di coordinate desiderato utilizzando la ben nota formula notevole

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta^k} \left( \sqrt{g} g^{kj} \frac{\partial T}{\partial \eta^j} \right) \quad (6.25)$$

**Coordinate Cartesiane**  $(x, y, z)$  La metrica è  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , pertanto otteniamo immediatamente

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (6.26)$$

**Coordinate cilindriche**  $(r, \phi, z)$  Abbiamo le seguenti componenti della metrica:  $g_{rr} = 1$ ,  $g_{\phi\phi} = r^2$ ,  $g_{zz} = 1$ . Le componenti controvarianti sono  $g^{rr} = 1$ ,  $g^{\phi\phi} = 1/r^2$ ,  $g^{zz} = 1$ . La radice quadrata del determinante della metrica covariante in questo caso è  $\sqrt{g} = r$ . Pertanto

$$\begin{aligned} \nabla^2 T &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( r \frac{1}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6.27)$$

**Coordinate sferiche**  $(r, \theta, \phi)$  . Abbiamo le seguenti componenti della metrica:  $g_{rr} = 1$ ,  $g_{\phi\phi} = r^2$ ,  $g_{\theta\theta} = (r \sin \phi)^2$ . Le componenti controvarianti sono  $g^{rr} = 1$ ,  $g^{\phi\phi} = 1/r^2$ ,  $g^{zz} = 1/(r \sin \phi)^2$ . La radice quadrata del determinante della metrica covariante in questo caso è  $\sqrt{g} = r^2 \sin \phi$ . Pertanto

$$\begin{aligned} \nabla^2 T &= \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \sin \phi \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{r^2 \sin \phi}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \\ &\quad \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{r^2 \sin \phi}{(r \sin \phi)^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{(r \sin \phi)^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (6.28)$$

### 6.1.6 Condizioni al contorno per l'equazione del calore

L'equazione di Fourier necessita di opportune condizioni al contorno e condizioni iniziali per essere risolta. Una certa superficie di contorno del solido potrebbe essere a contatto

con una sorgente di calore a temperatura prefissata oppure potrebbe scambiare calore per convezione con un fluido o anche scambiare energia termica per irraggiamento con i corpi circostanti. Il tipo di condizione al contorno più appropriata per un certo problema di conduzione può essere determinata da un bilancio di potenza sulla porzione di superficie di interesse. Ovviamente la scelta di una particolare condizione al contorno piuttosto che un'altra influenza in modo determinante la soluzione del problema. Le soluzioni analitiche (e numeriche) dell'equazione di Fourier si avvalgono spesso di condizioni al contorno *standard* che sono qui di seguito riassunte.

**Condizioni al contorno del primo tipo (Dirichlet)** La temperatura viene prescritta sulla superficie  $S$  a mezzo di una funzione  $f(\boldsymbol{\eta}, t)$ , cioè

$$T(\boldsymbol{\eta}, t) = f(\boldsymbol{\eta}, t) \quad \text{su } S \quad (6.29)$$

Se  $f \equiv 0$  allora diciamo che la condizione al contorno del primo tipo è *omogenea*.

**Condizioni al contorno del secondo tipo (Neumann)** Viene prescritto sulla superficie  $S$  il flusso di calore per conduzione (cioè la derivata direzionale di  $T$  nella direzione ortogonale alla superficie) a mezzo di una funzione  $f(\boldsymbol{\eta}, t)$ , cioè

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = k \nabla T \cdot \mathbf{n} = f(\boldsymbol{\eta}, t) \quad \text{su } S \quad (6.30)$$

Se  $f \equiv 0$  allora diciamo che la condizione al contorno del secondo tipo è *omogenea* (o *adiabatica*).

**Condizioni al contorno del terzo tipo (Robin)** Tali condizioni al contorno si definiscono *miste* oppure *condizioni al contorno di convezione*. Fisicamente esse corrispondono ad un equilibrio di potenza fra il flusso di calore conduttivo alla superficie del solido e quello che per convezione esterna viene scambiato con un fluido

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + hT = hT_f \quad \text{su } S \quad (6.31)$$

Se  $T_f \equiv 0$  allora diciamo che la condizione al contorno del terzo tipo (Robin) è *omogenea*. In generale una condizione del terzo tipo diviene omogenea se posta in forma adimensionale

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} + Bi\theta = 0 \quad (6.32)$$

in cui

$$\theta = \frac{T - T_f}{\Delta T_{\text{ref}}}, \quad Bi = \frac{hL_s}{k_s} \quad (h \text{ del fluido, } k_s \text{ del solido}) \quad (6.33)$$

$Bi$  è il numero di Biot e rappresenta il rapporto fra la potenza scambiata per convezione esterna ( $h$ ) e quella diffusa per conduzione interna (attraverso la conduttanza  $k_s/L_s$ ).

**Condizioni al contorno di interfaccia** Questo tipo di condizioni al contorno caratterizzano lo scambio di calore fra due corpi solidi in contatto fra loro attraverso una certa porzione di superficie. In questo caso

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} = h_c(T_1 - T_2) \quad (6.34)$$

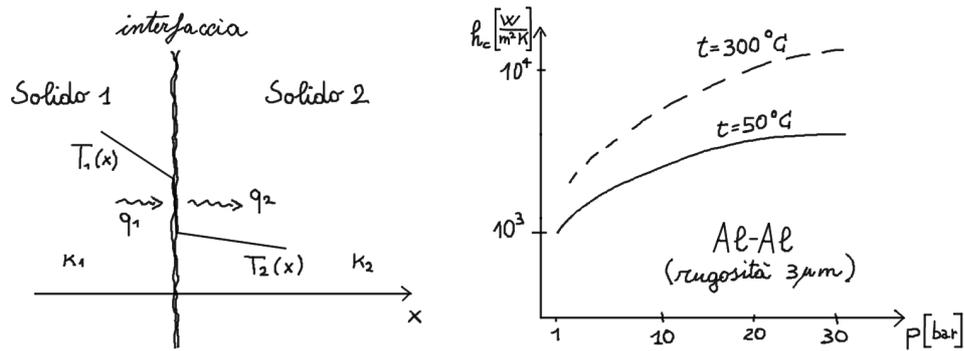


Figura 6.2: Effetti della conduttanza di contatto fra due solidi. A destra vi è la dipendenza della conduttanza di contatto dalla temperatura e della pressione di interfaccia per due superfici di alluminio aventi una rugosità superficiale di  $3\ \mu\text{m}$ . Per  $h_c \rightarrow \infty$  si ha un contatto termico perfetto.

in cui abbiamo indicato con  $h_c$  la *conduttanza di interfaccia*. Questo parametro è direttamente collegato dell'estensione del contatto fra i solidi. In particolare  $h_c$  è funzione del materiale, della pressione di contatto, della temperatura di contatto e della rugosità delle superfici in contatto. Nel caso in cui vi sia *contatto termico perfetto*, abbiamo  $h_c \rightarrow \infty$  e all'interfaccia si ha

$$T_1 = T_2 \quad (6.35)$$

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \quad (6.36)$$

**Trasformazione di condizioni al contorno non-omogenee in condizioni al contorno omogenee** Per motivi analitici e di stabilità numerica è spesso conveniente trasformare le condizioni al contorno in condizioni omogenee. Ciò non è sempre possibile, in particolare quando le condizioni al contorno sono dipendenti dal tempo.

## 6.2 Metodi matematici per la soluzione dell'equazione del calore

Vi sono vari metodi che possono essere utilizzati per calcolarsi la soluzione analitica (quando possibile) dell'equazione del calore. I principali sono qui di seguito descritti

### 6.2.1 Separazione delle variabili

Il metodo della separazione delle variabili è uno dei classici per ottenere delle soluzioni analitiche dell'equazione del calore. Alla base di questo metodo vi è una rappresentazione della soluzione  $T(\boldsymbol{\eta}, t)$  in termini del prodotto una una funzione del tempo  $\Theta(t)$  ed una dello spazio  $\Psi(\boldsymbol{\eta})$

$$T(\boldsymbol{\eta}, t) = \Psi(\boldsymbol{\eta}) \Theta(t) \quad (6.37)$$

Allorquando tale rappresentazione viene sostituita nell'equazione di Fourier abbiamo

$$\Psi \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \Theta \alpha \nabla^2 \Psi \quad (6.38)$$

Introduciamo ora una variabile di *separazione*  $\Lambda$  tale che<sup>6</sup>

$$\nabla^2\Psi = \Lambda\Psi \quad (6.40)$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = \alpha\Lambda\Theta \quad (6.41)$$

Se le condizioni al contorno del problema possono essere *separate* in modo tale da fornire opportune condizioni al contorno alle (6.40) e (6.41), allora abbiamo rappresentato la soluzione del problema della conduzione non stazionaria attraverso due problemi agli *autovalori* la cui soluzione può essere calcolata (si spera) in modo analitico. In altre parole, possiamo individuare la soluzione del problema di conduzione se siamo in grado di calcolarci le autofunzioni di un Laplaciano corrispondenti alle condizioni al contorno del problema, se queste sono separabili. Chiaramente un Laplaciano è un operatore lineare *formalmente simmetrico*. Se le condizioni al contorno sono tali da garantire la completa simmetria del Laplaciano (non solo quella formale) allora la teoria spettrale degli operatori lineari ci dice che possiamo costruire una base fatta di autofunzioni di  $\nabla^2$ . La simmetria rispetto ad  $L^2$  equivale a richiedere che

$$\int_V \nabla^2\Psi\varphi dV = \int_S \frac{\partial\Psi}{\partial n}\varphi dS - \int_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Psi dS + \int_V \Psi\nabla^2\varphi dV \quad (6.42)$$

Se le condizioni al contorno di  $T$  sono separabili, cioè possono essere separate in una condizione per  $\Psi$  ed una per  $\Theta$  allora si ha simmetria del Laplaciano se

$$\int_S \frac{\partial\Psi}{\partial n}\varphi dS = \int_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Psi dS \quad (6.43)$$

Notiamo che è facile separare condizioni al contorno omogenee. Stessa cosa non può dirsi per quelle non-omogenee e dipendenti dal tempo. In questo caso è difficile se non impossibile eseguire la separazione delle variabili, proprio a causa della impossibilità di separare le condizioni al contorno.

**Osservazione importante** Se il problema di conduzione non stazionaria ha delle condizioni al contorno *omogenee* del primo o del terzo tipo (non del secondo), cioè se si tratta di un problema nella forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\nabla^2 T \quad (6.44)$$

$$k_i \frac{\partial T}{\partial n^i} + h_i T = 0 \quad \text{su } S_i \quad (6.45)$$

$$T(\boldsymbol{\eta}, 0) = F(\boldsymbol{\eta}) \quad (\text{condizione iniziale}) \quad (6.46)$$

allora è possibile determinare a priori che la variabile di separazione ( $\Lambda$  è negativa). Infatti le condizioni al contorno sono tali da imporre al campo di temperatura una diminuzione asintotica nel tempo fino al valore 0 (quello che si ha in pratica sulle superfici del solido:

<sup>6</sup>Possiamo impropriamente definire la variabile di separazione utilizzando la

$$\Lambda = \frac{\nabla^2\Psi}{\Psi} = \frac{1}{\alpha\Theta} \frac{\partial\Theta}{\partial t} \quad (6.39)$$

L'attributo "improprio" è ovviamente dovuto al fatto nessuno ci garantisce che le funzioni  $\Psi$  o  $\Theta$  non si annullano da qualche parte, rendendo la divisione per zero priva di senso.

direttamente se si usa una condizione del primo tipo; a causa del flusso di calore se si usa una condizione del terzo tipo). Poichè l'integrale generale dell'equazione (6.41) è proprio

$$\Theta(t) = c_1 e^{\Lambda \alpha t} \quad (6.47)$$

e  $\alpha > 0$  la richiesta  $\Theta(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$  è soddisfatta solo se  $\Lambda < 0$ . Questo è il motivo principale per cui la separazione di variabili nei problemi di conduzione non stazionaria con condizioni al contorno *omogenee* del primo o del terzo tipo viene direttamente posta nella forma.

$$\nabla^2 \Psi + \lambda^2 \Psi = 0 \quad (6.48)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \alpha \lambda^2 \Theta = 0 \quad (6.49)$$

Cioè si studia attraverso una semplice *equazione di Helmholtz* (6.48). Quando viene eseguita una ulteriore separazione di variabili di l'equazione di Helmholtz genera (in coordinate cartesiane ed ortogonali) tre problemi del tipo Sturm-Liouville<sup>7</sup> le cui autofunzioni si rappresentano in termini di seni e coseni. Ribadiamo però che questa trattazione vale per condizioni al contorno *omogenee*. È facile tuttavia accorgersi che è possibile rendere omogenei un gran numero di problemi. Ad esempio, il cambiamento di variabili  $\theta(\boldsymbol{\eta}, t) = T(\boldsymbol{\eta}, t) - T_\infty$  trasforma il problema non omogeneo

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad (6.50)$$

$$k_i \frac{\partial T}{\partial n^i} + h_i T = h_i T_\infty \quad (6.51)$$

in un problema omogeneo

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \theta \quad (6.52)$$

$$k_i \frac{\partial \theta}{\partial n^i} + h_i \theta = 0 \quad (6.53)$$

Se abbiamo delle condizioni al contorno non omogenee del primo tipo (non dipendenti dal tempo) possiamo utilizzare la linearità della equazione di Fourier e *splittare* la soluzione del problema in sottoproblemi da risolvere il cascata. In pratica si cerca di eliminare le parti non omogenee delle condizioni al contorno risolvendo dei problemi di conduzione stazionaria, la cui soluzione sarà sovrapposta alla soluzione dipendente dal tempo, calcolata con condizioni omogenee. Ancora più semplicemente se le condizioni al contorno non omogenee del primo tipo sono le stesse su tutte le superfici non c'è neanche bisogno di splittare il problema. Basta cambiare le variabili secondo  $\theta(\boldsymbol{\eta}, t) = T(\boldsymbol{\eta}, t) - T_1$  in cui  $T_1$  rappresenta il valore di temperatura al contorno. Ad esempio se abbiamo una lastra isoterma alla temperatura  $T_0$  è poniamo entrambi le facce della lastra alla stessa temperatura  $T_1 < T_0$  allora possiamo studiare il transitorio impiegando condizioni del primo tipo omogenee utilizzando il cambiamento di variabili suddetto.

<sup>7</sup>In coordinate cilindriche e in coordinate sferiche la separazione della variabili è analiticamente più complessa. I problemi agli autovalori che saltano fuori hanno autofunzioni differenti che possono essere ad esempio delle funzioni di Bessel nel caso delle coordinate cilindriche oppure delle funzioni di Legendre nel caso delle coordinate sferiche. Una separazione di variabili potrebbe non essere realizzabile in coordinate arbitrarie, dato che nessuno garantisce la simmetria degli operatori che definiscono i problemi agli autovalori.

## La separazione di variabili in coordinate Cartesiane ed ortogonali

Ritorniamo al problema agli autovalori (6.40) e per il momento non ci occupiamo delle condizioni al contorno. Consideriamo coordinate Cartesiane ed ortogonali  $(x, y, z)$  e ricerchiamo una soluzione del problema (6.40) nella forma

$$\Psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (6.54)$$

Sostituendo tale espressione in

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \Lambda \Psi \quad (6.55)$$

otteniamo

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} = \Lambda XYZ \quad (6.56)$$

Tale equazione può essere decomposta in tre problemi agli autovalori per operatori del secondo ordine nella forma

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = a_x X \quad (6.57)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = a_y Y \quad (6.58)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = a_z Z \quad (6.59)$$

che, se sostituite in (6.56) forniscono una identità a patto di porre  $\Lambda = a_x + a_y + a_z$ . L'integrale generale delle equazioni (6.57)-(6.59) è<sup>8</sup>

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{a_x}x} + c_2 e^{-\sqrt{a_x}x} \quad (6.61)$$

Imponendo le condizioni al contorno otteniamo delle equazioni in  $a_x$ , che di solito hanno una infinità *numerabile* di soluzioni. Tali soluzioni che indichiamo con  $(a_x)_n$ , per  $n = 1, 2, \dots$ , sono gli *autovalori* del problema (6.57) e le *autofunzioni* corrispondenti sono  $X_n(x)$ . Se le condizioni al contorno per  $X$  sono tali da rendere simmetrico il problema agli autovalori (6.57) allora la teoria spettrale garantisce che le funzioni  $X_n$  sono una base ortogonale di  $L^2$ . Possiamo ripetere la stessa procedura per  $Y$  e  $Z$  ed ottenere una serie di autovalori  $(a_y)_n$  e  $(a_z)_n$  ed autofunzioni  $Y_n$  e  $Z_n$ . Convien riordinare gli autovalori  $\Lambda_{ijk} = (a_x)_i + (a_y)_j + (a_z)_k$  in ordine non crescente ottenendo

$$\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \dots \quad (6.62)$$

Tale riordinamento introduce una certa sequenza di triadi  $ijk$ , che supponiamo nota. Con tale accorgimento possiamo rappresentare le autofunzioni di (6.40) nella forma

$$\Psi_i(x, y, z) = X_i(x)Y_i(y)Z_i(z) \quad (6.63)$$

---

<sup>8</sup>Infatti se ricerchiamo la soluzione di (6.57) nella forma  $X(x) = e^{bx}$  troviamo che  $b^2 = a_x$  cioè  $b = \pm\sqrt{a_x}$ . Quindi l'integrale generale di (6.57) è (6.61). Nel caso in cui  $a_x$  sia *negativo* abbiamo degli esponenziali immaginari, equivalenti a seni e coseni, e l'integrale generale (6.61) è equivalente a

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{-a_x}x) + c_2 \cos(\sqrt{-a_x}x) \quad (6.60)$$

Tali autofunzioni sono ovviamente ortogonali in  $L^2$  (non ortonormali). Per comodità di notazione supponiamo di avere pure eseguito la normalizzazione ed indichiamo con  $\widehat{\Psi}_i$  le autofunzioni normalizzate. A questo punto è possibile ricostruire la soluzione del problema di conduzione come

$$T(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n c_i \widehat{\Psi}_i(x, y, z) e^{\alpha \Lambda_i t} \quad (6.64)$$

Per determinare i coefficienti  $c_i$  si utilizza la *condizione iniziale* del problema di temperatura

$$c_i = \int_V T(x, y, z, 0) \widehat{\Psi}_i(x, y, z) dx dy dz \quad (6.65)$$

**Esempio 1: conduzione non stazionaria con condizioni al contorno non omogenee del primo tipo** Come esempio di conduzione non stazionaria ci proponiamo di calcolare la distribuzione di temperatura in una lastra piana indefinita di spessore  $L$  soggetta ad una temperatura imposta (non dipendente dal tempo) su entrambi i lati. La condizione iniziale può essere arbitraria (purché compatibile con le condizioni al contorno) e la differenza fra la soluzione stazionaria e la condizione iniziale è ciò che genera il transitorio. Le equazioni che descrivono il fenomeno sono

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (6.66)$$

$$T(0, t) = T_1 \quad (6.67)$$

$$T(s, t) = T_2 \quad (6.68)$$

$$T(x, 0) = f(x) \quad (6.69)$$

Notare che le condizioni al contorno *non* dipendono dal tempo. In caso contrario è piuttosto difficile separare le variabili delle condizioni al contorno.

Quando si incontrano condizioni al contorno non-omogenee, la prima cosa da fare è quella di tentare di trasformare il problema in uno equivalente con condizioni omogenee. A tal fine notiamo che il problema (6.66)-(6.69) può essere *splittato* nella soluzione di due problemi. Infatti è possibile ottenere una soluzione dell'equazione *stazionaria* che verifica entrambe le condizioni al contorno ed utilizzare tale soluzione per trasformare il problema non-omogeneo in uno omogeneo. A tal fine è sufficiente considerare

$$T(x, t) = T_0(x) + T_h(x, t) \quad (6.70)$$

in cui

$$T_0(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L} \quad (6.71)$$

Sostituendo la decomposizione (6.70) nelle (6.66)-(6.69) otteniamo

$$\frac{\partial T_h}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T_h}{\partial x^2} \quad (6.72)$$

$$T_h(0, t) = 0 \quad (6.73)$$

$$T_h(s, t) = 0 \quad (6.74)$$

$$T_h(x, 0) = f(x) - T_0(x) = F(x) \quad (6.75)$$

Trattandosi di un problema *omogeneo* consideriamo  $T_h(x, t) = \Theta(t) X(x)$  ed una variabile di separazione  $\lambda > 0$  tale che

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad (6.76)$$

$$X(0) = 0 \quad (6.77)$$

$$X(L) = 0 \quad (6.78)$$

Le condizioni al contorno per  $X$  si ottengono considerando che per ogni  $t$  deve valere

$$T_h(0, t) = \Theta(t) X(0) = 0 \quad (6.79)$$

$$T_h(L, t) = \Theta(t) X(L) = 0 \quad (6.80)$$

L'integrale generale (6.76) è

$$X(x) = c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x) \quad (6.81)$$

Le condizioni al contorno sono soddisfatte se

$$X(0) = c_2 \cos(\lambda 0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \quad (6.82)$$

$$X(L) = c_1 \sin(\lambda L) = 0 \Rightarrow \sin(\lambda L) = 0 \quad (6.83)$$

Dalla seconda troviamo gli autovalori del problema

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{L} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.84)$$

Le autofunzioni sono

$$X_k(x) = c_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad (6.85)$$

La costante  $c_k$  la determiniamo attraverso la normalizzazione di  $X_k$  nel senso di  $L^2$ . Otteniamo la condizione

$$\frac{1}{c_k^2} = \int_0^L \sin^2\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \quad (6.86)$$

Poniamo  $y = \frac{k\pi}{L}x$  ottenendo:

$$\frac{1}{c_k^2} = \frac{L}{k\pi} \int_0^{k\pi} \sin^2(y) dy = \frac{L}{2k\pi} [y - \sin(y) \cos(y)]_0^{k\pi} = \frac{L}{2} \quad (6.87)$$

Pertanto le autofunzioni normalizzate sono

$$\widehat{X}_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad (6.88)$$

Considerando una rappresentazione della soluzione nella forma

$$T_h(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \widehat{X}_k(x) e^{-k \frac{\alpha\pi}{L} t} \quad (6.89)$$

ed imponendo la condizione iniziale

$$F'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \widehat{X}_i(x) \quad (6.90)$$

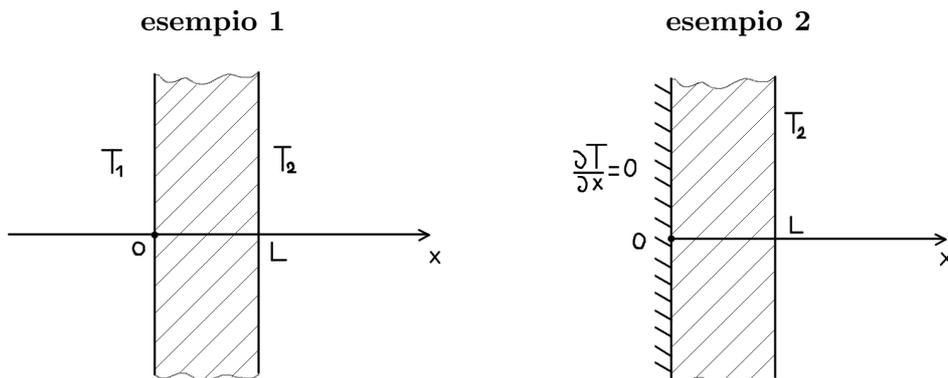


Figura 6.3: Schemi di riferimento e condizioni al contorno per i transitori di temperatura trattati nell'esempio 1 e nell'esempio 2 utilizzando il metodo di separazione delle variabili. In entrambi i casi la condizione al contorno è stazionaria.

è immediato ottenere (dall'ortonormalità di  $\widehat{X}_i$ )

$$T_h(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{X}_k(x) e^{-k \frac{\alpha \pi}{L} t} \int_0^L F(x') \widehat{X}_k(x') dx' \quad (6.91)$$

Se si incontrassero difficoltà nel calcolo del fattore di normalizzazione delle autofunzioni ciò non costituisce un problema. Esso può essere lasciato come parametro non esplicitato senza arrestare la sequenza di passaggi che porta alla (6.91).

**Esempio 2: conduzione non stazionaria con condizioni al contorno omogenee del primo e del secondo ordine** Consideriamo una lastra piana di spessore  $L$  che si trova inizialmente alla temperatura  $T_i$ . La faccia di sinistra è isolata termicamente mentre quella di destra viene portata alla temperatura  $T_0 < T_i$ . Vogliamo determinare il transitorio di temperatura. Il problema è matematicamente descritto dalle equazioni

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial T}{\partial x} \quad (6.92)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0) = 0 \quad (6.93)$$

$$T(L) = T_0 \quad (6.94)$$

$$T(x) = T_i \quad (6.95)$$

è facile ottenere un problema omogeneo in questo caso, basta porre  $\theta = T - T_0$ . Dobbiamo risolvere pertanto il seguente problema di Sturm-Liouville

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad (6.96)$$

$$\frac{dX}{dx}(0) = 0 \quad (6.97)$$

$$X(L) = 0 \quad (6.98)$$

Al solito l'integrale generale è

$$X(x) = c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x) \quad (6.99)$$

le condizioni al contorno sono verificate se

$$c_1 = 0 \quad (6.100)$$

$$\cos(\lambda L) = 0 \quad (6.101)$$

Dalla seconda troviamo gli autovalori

$$\lambda_k = k \frac{\pi}{L} - \frac{\pi}{2L} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.102)$$

Le autofunzioni sono

$$X_k(x) = c_k \cos(\lambda_k x) \quad (6.103)$$

Normalizzando  $X_k(x)$  in  $L^2([0, L])$  otteniamo  $c_k = \sqrt{2/L}$  ed un set ortonormale  $\widehat{X}_k(x)$ . Otteniamo infine la soluzione

$$\theta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{X}_i(x) e^{-\alpha \lambda_i t} \int_0^L \theta_i \widehat{X}_i(x) dx \quad (6.104)$$

Giova rilevare che in questo caso l'integrale per la condizione iniziale si calcola bene

$$\int_0^L \theta_i \widehat{X}_i(x) dx = \theta_i \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \cos(\lambda_i x) dx = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{\theta_i}{\lambda_i} \sin(\lambda_i L) = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{\theta_i}{\lambda_i} (-1)^{i+1} \quad (6.105)$$

### Condizione stazionaria multidimensionale con condizioni al contorno non omogenee del primo tipo

La soluzione dell'equazione di Fourier stazionaria appartiene alla teoria delle equazioni di Laplace. I metodi che abbiamo applicato per separare le variabili nell'equazione di Helmholtz o nel problema agli autovalori per l'equazione di Laplace possono essere applicati in questo caso per ottenere una rappresentazione della soluzione in termini di una espansione spettrale ortogonale. Consideriamo una equazione di Laplace bidimensionale

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (6.106)$$

Poniamo  $T(x, y) = X(x)Y(y)$ . Sostituendo nel Laplaciano notiamo che possiamo separare le variabili secondo

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad (6.107)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \quad (6.108)$$

La soluzione di questo problema può essere facilmente ottenuta calcolandosi le  $X(x)$  e  $Y(y)$  che corrispondono alle condizioni al contorno. Gli integrali generali sono

$$X(x) = a_1 \sin(\lambda^2 x) + a_2 \cos(\lambda^2 x) \quad (6.109)$$

$$Y(y) = b_1 \sinh(\lambda^2 y) + b_2 \cosh(\lambda^2 y) \quad (6.110)$$

Le costanti  $a_1, a_2, b_1$  e  $b_2$  si determinano considerando la funzione  $T(x, y) = X(x)Y(y)$  ed imponendo le condizioni al contorno per  $T$ .

### La separazione di variabili in coordinate cilindriche

Talvolta è conveniente studiare l'equazione del calore in coordinate cilindriche. Anche in questi casi il metodo della separazione delle variabili può essere applicato con successo. Infatti, ponendo

$$T(r, \phi, z, t) = \Psi(r, \phi, z) \Theta(t) \quad (6.111)$$

e sostituendo nell'equazione del calore troviamo nuovamente

$$\nabla^2 \Psi = \Lambda \Psi \quad (6.112)$$

in cui  $\Lambda$  è una variabile di separazione (strettamente negativa se le condizioni al contorno sono omogenee). In coordinate cilindriche (6.112) si scrive come

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \Lambda \Psi \quad (6.113)$$

Se consideriamo una rappresentazione della funzione  $\Psi$  nella forma

$$\Psi(r, \phi, z) = R(r) \Phi(\phi) Z(z) \quad (6.114)$$

e la sostituiamo in (6.113) otteniamo

$$\frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \Lambda \quad (6.115)$$

che è verificata solo se le funzioni di  $r$ ,  $\phi$  e  $z$  verificano

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = \eta Z \quad (6.116)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \nu \Phi \quad (6.117)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{\nu}{r^2} R = \beta R \quad (6.118)$$

L'integrale generale delle (6.116) e (6.117) lo conosciamo già: esso è sovrapposizione lineare di funzioni esponenziali reali o complesse, quest'ultime equivalenti a seni e coseni. L'integrale generale di (6.118) invece è costituito da funzioni di Bessel. Pertanto lo studio analitico dei transienti in coordinate cilindriche è più articolato a causa della presenza di funzioni di Bessel. In coordinate sferiche la separazione delle variabili del Laplaciano definisce un problema le cui funzioni di base sono funzioni di Legendre (polinomi di Legendre o più in generale funzioni di Legendre).

### 6.2.2 Metodo che impegna il teorema di Duhamel per trattare condizioni al contorno dipendenti dal tempo

In molte applicazioni ingegneristiche le condizioni al contorno di un problema di conduzione sono dipendenti dal tempo. In questi casi il teorema di Duhamel fornisce un metodo sistematico per determinare la soluzione del problema. Tale teorema afferma quanto segue. Se congeliamo la dipendenza dal tempo nelle condizioni al contorno ivi considerando la variabile tempo  $t$  alla stregua di un parametro  $\tau$  possiamo risolverci un problema di

conduzione ausiliario per un campo  $\Phi(\boldsymbol{\eta}, t, \tau)$ , in cui le condizioni al contorno sono stazionarie. Nota  $\Phi(\boldsymbol{\eta}, t, \tau)$  possiamo determinare la temperatura utilizzando la *formula di Duhamel*

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{\eta}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \Phi(\boldsymbol{\eta}, t - \tau, \tau) d\tau \\ &= T(\boldsymbol{\eta}, 0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\boldsymbol{\eta}, t - \tau, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (6.119)$$

**Esempio 3: conduzione non stazionaria in una lastra piana con una condizione al contorno dipendente dal tempo.** Consideriamo una lastra piana infinita inizialmente a temperatura uniforme  $T_0$ , isolata termicamente da una parte e con una temperatura imposta dall'altra parte. La determinazione della temperatura passa attraverso la soluzione del seguente problema

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (6.120)$$

$$T(0, t) = f(t) \quad (6.121)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (6.122)$$

$$T(x, 0) = T_0 \quad (6.123)$$

Ad esempio possiamo avere  $f(t) = T_0 + A \sin(t)$ . Conviene anzitutto trasformare il problema, rendendo la condizione iniziale omogenea. A tal fine poniamo  $\theta = T - T_0$  ottenendo

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (6.124)$$

$$\theta(0, t) = \underbrace{f(t) - T_0}_{f'(t)} \quad (6.125)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (6.126)$$

$$\theta(x, 0) = 0 \quad (6.127)$$

Per problemi di conduzione aventi temperatura iniziale nulla ed una sola condizione al contorno non omogenea e dipendente dal tempo<sup>9</sup> conviene considerare il seguente *problema ausiliario*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (6.128)$$

$$\Phi(0, t) = 1 \quad (6.129)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (6.130)$$

$$\Phi(x, 0) = 0 \quad (6.131)$$

in cui  $\Phi(x, t) = \Phi(x, t, \tau) / f'(t)$ . È molto semplice ottenere la soluzione di questo problema ponendo  $\Phi' = \Phi - 1$  e procedendo con una separazione di variabili o una trasformata

<sup>9</sup>Potrebbe essere una condizione del primo tipo, come nel presente esempio, oppure una condizione del secondo o del terzo tipo.

integrale. Nota la soluzione  $\Phi(x, t)$ , determiniamo la temperatura in transitorio come segue

$$\theta(x, t) = 0 + \int_0^t f'(\tau) \frac{\partial \Phi(x, t - \tau)}{\partial t} d\tau \quad (6.132)$$

Questa formula discende direttamente da quella di Duhamel (6.119) ponendo  $\Phi(x, t, \tau) = f'(\tau)\Phi(x, t)$ .

### 6.2.3 Metodo della trasformata di Laplace

Come noto, utilizzando il metodo della trasformata di Laplace è possibile trasformare equazioni differenziali lineari in equazioni algebriche. Questo è molto utile e pratico nello studio dei sistemi lineari in cui la funzione di trasferimento caratterizza attraverso i poli e gli zeri il legame matematico fra l'ingresso e l'uscita. Nel contesto dell'equazione del calore la trasformata di Laplace viene applicata per eliminare la derivata della temperatura (o di qualche trasformata della temperatura) rispetto al tempo. Dunque la praticità del metodo è evidente se si considerano problemi non stazionari riducibili in qualche modo ad equazioni differenziali *ordinarie* nella variabile tempo. Il metodo della trasformata integrale appartiene a questa classe. Inoltre si ha praticità se è semplice invertire la trasformazione, cioè se la soluzione trasformata è riconducibile ad un caso che si trova nelle tabelle.

### 6.2.4 Metodo della trasformata integrale

Il metodo di separazione delle variabili presenta delle difficoltà di applicazione se le condizioni al contorno sono *non-omogenee* e dipendenti dal tempo. In quest'ultimo caso infatti è difficile o addirittura impossibile eseguire la separazione delle variabili. Inoltre per alcuni tipi di condizioni al contorno i problemi agli autovalori che saltano fuori dalla separazione delle variabili *potrebbero non essere simmetrici*, la qual cosa non garantisce la completezza dell'insieme di autofunzioni che poi utilizziamo per rappresentare la soluzione.

Il metodo della *trasformata integrale* fornisce un approccio sistematico, efficiente e di facile applicazione per la soluzione di una classe molto ampia di problemi di conduzione stazionaria e non-stazionaria con condizioni al contorno omogenee oppure non omogenee. Il metodo si basa sempre nell'utilizzo di *autofunzioni* di un problema differenziale agli autovalori scelto astutamente, in modo tale che a seguito della trasformazione integrale e di una integrazione per parti, alcuni termini dell'equazione trasformata (di solito il Laplaciano della temperatura) si levano di torno. Gli step fondamentali per risolvere l'equazione del calore attraverso una trasformata integrale sono

1. definizione di un problema agli autovalori le cui autofunzioni siano in grado di rappresentare in modo *completo* la parte spaziale ( $L^2(V)$ ) di una decomposizione di  $L^2(V \times T)$  nella forma  $L^2(V \times T) = L^2(V) \otimes L^2(T)$ , in cui  $V$  è il dominio spaziale  $T$  quello temporale. Tali autofunzioni devono inoltre essere *compatibili* con le condizioni al contorno.
2. applicazione della trasformata integrale definita dalle autofunzioni di cui al punto 1) all'equazione del calore e semplificazione dei termini che possono essere semplificati dopo una integrazione per parti (di solito si torpedina il Laplaciano);

3. soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie che definiscono la dinamica temporale della trasformata integrale della temperatura, corredata da opportuna condizione iniziale trasformata;
4. si applica la trasformata inversa e si ricostruisce il campo di temperatura in termini di funzioni di base che evolvono nel tempo.

**Definizione della trasformata integrale** Consideriamo lo spazio delle funzioni quadrato sommabili definite su un dominio  $V$  dello spazio tridimensionale, ed indichiamo tale spazio con  $L^2(V)$ . Scelta arbitrariamente una qualunque base spettrale di  $L^2$  è possibile rappresentare una qualunque funzione relativamente a tale base. Per problemi di conduzione è utile (ma non strettamente necessario) costruire una decomposizione spettrale di  $L^2(V)$  utilizzando le autofunzioni del Laplaciano che corrispondono ad opportune condizioni al contorno. In motivo è evidente: il Laplaciano della temperatura che compare nell'equazione di Fourier si semplifica se proiettato su una base di autofunzioni di un Laplaciano. Consideriamo pertanto il seguente problema agli autovalori

$$\nabla^2 \Psi = \Lambda \Psi \quad (6.133)$$

in un dominio spaziale  $V$  correato da opportune condizioni al contorno che *garantiscono la simmetria del Laplaciano* (ad esempio una condizione omogenea del terzo tipo). È ben noto che se il problema è simmetrico possiamo costruire una base *ortonormale* di  $L^2(V)$  fatta di autofunzioni (normalizzate) del problema agli autovalori (6.133). Impiegando tale decomposizione spettrale di  $L^2(V)$  rappresentiamo la soluzione del problema di conduzione come

$$T(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{T}_i(t) \Psi_i(\mathbf{x}) \quad (\text{formula di inversione}) \quad (6.134)$$

ove

$$\hat{T}_i(t) = \int_V T(\mathbf{x}, t) \Psi_i(\mathbf{x}) dV \quad (\text{trasformata integrale}) \quad (6.135)$$

Come indicato sopra, le equazioni (6.135) ed (6.134) vengono dette comunemente *trasformata integrale*, e *formula di inversione*. Nella teoria dello spazio di Hilbert si tratta semplicemente di una espansione ortogonale (spettrale) in cui  $\hat{T}$  è il coefficiente di Fourier. Evidentemente la trasformata può applicarsi ad un qualunque campo che sta in  $L^2(V \times T)$ , ad esempio a  $\nabla^2 T$ , con  $T$  funzione continua e limitata. La scelta delle autofunzioni del Laplaciano per costruire la base spettrale è utile ma non è l'unica possibilità. Scelte alternative sono: polinomi ortogonali multidimensionali, serie di Fourier in caso di condizioni al contorno periodiche, ecc... ecc... .

### Applicazione della trasformata integrale all'equazione del calore

Consideriamo l'equazione di Fourier

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad (6.136)$$

ed applichiamo la trasformata integrale (6.135). A tal fine proiettiamo alla Galerkin (6.136) su  $\Psi_k$

$$\int_V \Psi_k \frac{\partial T}{\partial t} dV = \alpha \int_V \Psi_k \nabla^2 T dV \quad (6.137)$$

Questa equazione può scriversi come<sup>10</sup>

$$\frac{d\widehat{T}_k}{dt} = \alpha \int_V \nabla^2 \Psi_k T dV + \underbrace{\alpha \int_S \left( \Psi_k \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial \Psi_k}{\partial n} \right) dS}_{A_k(t)} \quad (6.138)$$

Notare che se imponiamo  $\Psi_k \equiv 0$  per le autofunzioni del Laplaciano, possiamo comunque imporre delle condizioni di Dirichlet per la temperatura. Se ci fa comodo, possiamo anche suddividere la superficie  $S$  in una sovrapposizione di più superfici  $S_i$  e scrivere

$$A_k(t) = \alpha \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \left( \Psi_k \frac{\partial T}{\partial n^i} - T \frac{\partial \Psi_k}{\partial n^i} \right) dS_i \quad (6.139)$$

A questo punto appare evidente il vantaggio di aver scelto le autofunzioni del Laplaciano come base spettrale. Infatti il primo termine al membro di destra può scriversi come

$$\alpha \int_V \nabla^2 \Psi_k T dV = \alpha \Lambda_k \int_V \Psi_k T dV = \alpha \Lambda_k \widehat{T}_k \quad (6.140)$$

Dunque, la trasformata integrale permette di trasformare l'equazione di Fourier in un sistema di equazioni differenziali ordinarie *disaccoppiate* nella forma

$$\frac{d\widehat{T}_k(t)}{dt} = \alpha \Lambda_k \widehat{T}_k(t) + A_k(t) \quad (6.141)$$

Notiamo che il termine di contorno  $A_k(t)$  deve poter essere calcolabile esplicitamente, impiegando le condizioni al contorno di temperatura e di  $\Psi_k$ . Inoltre la trasformata della condizione iniziale si calcola facilmente applicando la definizione

$$\widehat{T}_k(0) = \int_V T(\mathbf{x}, 0) \Psi_k(\mathbf{x}) dV \quad (6.142)$$

La soluzione di (6.141) è<sup>11</sup>

$$\widehat{T}_k(t) = e^{\Lambda_k \alpha t} \left[ \widehat{T}_k(0) + \int_0^t e^{-\alpha \Lambda_k t'} A_k(t') dt' \right] \quad (6.144)$$

<sup>10</sup>Abbiamo applicato due volte il teorema di integrazione per parti (formule di Green). Nel caso monodimensionale abbiamo

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{d^2 T}{dx^2} \Psi_k dx &= \left[ \frac{dT}{dx} \Psi_k \right]_a^b - \int_a^b \frac{dT}{dx} \frac{d\Psi_k}{dx} dx \\ &= \left[ \frac{dT}{dx} \Psi_k - \frac{d\Psi_k}{dx} T \right]_a^b + \int_a^b T \frac{d^2 \Psi_k}{dx^2} dx \end{aligned}$$

<sup>11</sup>La soluzione di (6.141) si ottiene sommando all'integrale generale della equazione omogenea un integrale particolare della equazione equazione non omogenea. Questo è dovuto alla *linearità* dell'equazione differenziale. In pratica verifichiamo la condizione iniziale del problema utilizzando la soluzione omogenea. Ad essa sovrapponiamo un'altra soluzione (che si annulla all'istante iniziale) e che verifica l'equazione non omogenea. Un integrale particolare della equazione non omogenea che soddisfa tale condizione è

$$e^{\Lambda_k \alpha t} \int_0^t e^{-\alpha \Lambda_k t'} A_k(t') dt' \quad (6.143)$$

L'integrale generale dell'omogenea associata è invece  $c_1 e^{\Lambda_k \alpha t}$ . Applicando la condizione iniziale troviamo che la soluzione dell'equazione omogenea è  $\widehat{T}_k(0) e^{\Lambda_k \alpha t}$ .

Infine possiamo ricostruire la soluzione del problema del calore come

$$T(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\Lambda_k \alpha t} \left[ \widehat{T}_k(0) + \int_0^t e^{-\alpha \Lambda_k t'} A_k(t') dt' \right] \Psi_k(\mathbf{x}) \quad (6.145)$$

La trasformata integrale può essere applicata in coordinate cartesiane, cilindriche e sferiche. Cambiano naturalmente le autofunzioni del Laplaciano ma il metodo descritto in questa sezione rimane valido per tutti e tre i casi.

### 6.3 Metodo a parametri concentrati

In molte applicazioni ingegneristiche la temperatura e molti altri parametri fisici possono essere considerati uniformi nel sistema. In questi casi gli eventuali transitori possono essere studiati utilizzando semplici equazioni differenziali ordinarie. È il caso della vaporizzazione indotta da una pompa a vuoto in un barilotto a tenuta contenente acqua. In questo caso è ragionevole supporre che durante il transitorio la temperatura sia uniforme nella fase liquida. Gli esempi comunque potrebbero moltiplicarsi.

Nel caso specifico dei processi di conduzione nei solidi, l'applicazione del primo principio della termodinamica per sistemi chiusi al volume occupato dal solido fornisce

$$Mc_v \frac{dT}{dt} = Q_{tot} \quad (6.146)$$

In particolare se la potenza termica scambiata attraverso la superficie è per convezione esterna avremo

$$Mc_v \frac{dT}{dt} = hS(T_{\infty} - T) \quad (6.147)$$

che può essere riscritta come

$$\frac{dT}{dt} = \frac{hS}{Mc_v}(T_{\infty} - T) \quad (6.148)$$

con una certa condizione iniziale  $T(0) = T_0$ . Con le posizioni

$$\theta(t) = T(t) - T_{\infty} \quad m = \frac{hS}{Mc_v} \quad (6.149)$$

Otteniamo l'equazione

$$\frac{d\theta}{dt} + m\theta = 0 \quad (6.150)$$

la cui soluzione è (vd. figura 6.4(a))

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-mt} \quad (6.151)$$

Chiaramente se la convezione è molto intensa ( $h \uparrow$ ) avremo  $m$  elevato e l'ipotesi di uniformità della temperatura nel solido potrebbe non essere valida. Un parametro adimensionale che quantifica questa questione è il *numero di Biot*. Esso rappresenta il rapporto fra la potenza scambiata per convezione esterna e quella diffusa per conduzione interna.

$$Bi = \frac{hL_s}{k_s} \quad L_s = \frac{V}{S} \quad (6.152)$$

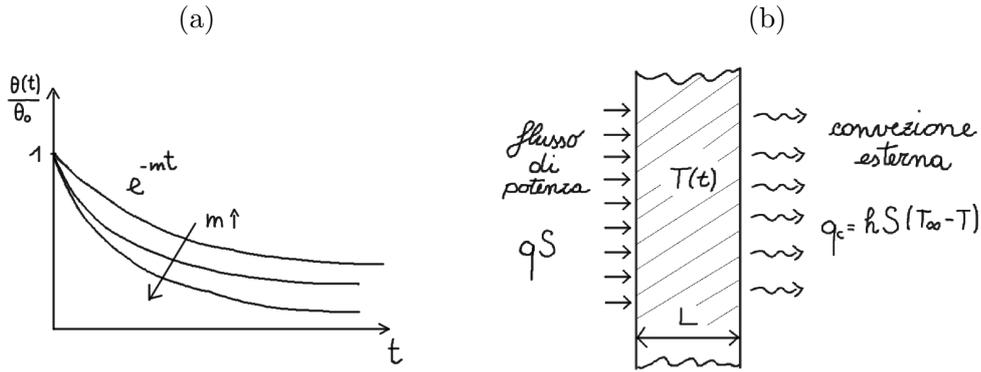


Figura 6.4: (a) Transitorio di temperatura per condizioni al contorno di tipo convettivo. (b) Lastra piana con condizioni al contorno miste: convezione imposta sul lato destro e flusso di calore imposto sul lato sinistro.

Notare che la definizione è analoga a quella del numero di Nusselt. Tuttavia in quest'ultimo caso tutti i parametri sono riferiti esclusivamente al fluido, mentre nel caso del numero di Biot essi sono riferiti al solido ( $L_s$  e  $k_s$ ) ed al fluido ( $h$ ).

Per fenomeni di conduzione non stazionaria in lastre piane, cilindri e sfere aventi condizioni al contorno del tipo convettivo (terzo tipo) si può dimostrare che ad ogni istante la temperatura è uniforme (con approssimazione al  $\pm 5\%$ ) nel solido se

$$Bi < 0.1 \quad (6.153)$$

Pertanto la prima cosa da fare in un problema di conduzione non stazionaria è verificare il numero di Biot. Se esso è molto piccolo allora possiamo ritenere valida una approssimazione di temperatura uniforme nel solido e risolvere il transitorio con una equazione differenziale ordinaria.

### Esempio: lastra piana con condizioni al contorno miste

Con riferimento alla figura 6.4(b), possiamo scrivere l'equazione di bilancio di energia come

$$Mc_v \frac{dT}{dt} = qS + hS(T_\infty - T) \quad (6.154)$$

Posto  $\theta(t) = T(t) - T_\infty$ , otteniamo

$$\frac{d\theta}{dt} + m\theta = Q \quad (6.155)$$

ove

$$m = \frac{hS}{Mc_v} \quad Q = \frac{qS}{Mc_v} \quad (6.156)$$

La soluzione generale di (6.155) si ottiene come sovrapposizione di una soluzione particolare e di quella generale dell'equazione omogenea:

$$\theta(t) = C_1 e^{-mt} + \frac{Q}{m} = C_1 e^{-mt} + \frac{q}{h} \quad (6.157)$$

Da questa, imponendo la condizione iniziale  $\theta(0) = \theta_0$  segue

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 e^{-mt} + (1 - e^{-mt}) \frac{q}{h}} \quad (6.158)$$

Per  $t \rightarrow \infty$ , abbiamo la soluzione asintotica  $\theta(t) = q/h$ .

### 6.3.1 Diagrammi per lo studio dei transitori di temperatura

Per numeri di Biot elevati i gradienti di temperatura nel solido sono elevati e l'approssimazione di temperatura uniforme non è più valida. In questi casi occorre risolversi analiticamente il problema di conduzione con uno dei metodi illustrati nelle sezioni precedenti. I risultati di tale analisi teorica sono talvolta riportati in forma grafica, sfruttando l'adimensionalizzazione che li rende validi per una intera classe di problemi.

#### Applicazione alla lastra piana

Abbiamo visto che l'equazione di Fourier può essere adimensionalizzata e posta nella forma

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \nabla^2 T \quad (6.159)$$

in cui  $\tau = t\alpha/L^2$  è il tempo adimensionalizzato (noto anche come numero di Fourier). Anche le condizioni al contorno possono essere adimensionalizzate. Ad esempio una condizione non-omogenea del terzo tipo

$$k \frac{\partial T}{\partial x} + h(T - T_\infty) = 0 \quad (6.160)$$

può essere posta nella forma

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + Bi\theta = 0 \quad (6.161)$$

Utilizzando l'adimensionalizzazione, al solito troviamo che il numero dei parametri da cui dipende una intera *classe di problemi* si riduce. Nel caso specifico della conduzione non stazionaria su lastra piana abbiamo tre parametri  $Bi$ ,  $\tau$  (numero di Fourier) e  $X$  (distanza adimensionale dall'asse della lastra). Per fissato  $X$  vi sono diagrammi che riportano la temperatura adimensionale  $\theta$  in funzione del tempo adimensionalizzato  $\tau$  e del numero di Biot. Vi sono anche altri diagrammi che permettono di traslare l'evoluzione temporale che si ha in un certo punto  $X$  di riferimento (ad esempio il punto medio di una lastra) in altri punti.

### 6.3.2 Conduzione stazionaria bidimensionale utilizzando il fattore di forma di conduzione

Una volta ottenuta la soluzione analitica del problema di conduzione è buona abitudine rendere accessibile tale soluzione anche a chi non ha voglia di farsi i conti per bene ma ha comunque la necessità di determinare la potenza termica scambiata. A tal fine viene definito il coefficiente di forma di conduzione  $F$  attraverso la relazione

$$\boxed{Q = Fk(T_1 - T_2)} \quad (6.162)$$

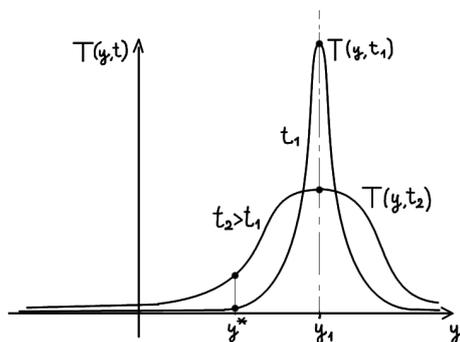


Figura 6.5: Dinamica della temperatura in un solido infinito a seguito della perturbazione  $\delta T(y, 0) = \delta(y - y_1)$  all'istante  $t = 0$ . Si nota che in un tempo infinitamente vicino a 0 tutti i punti del dominio anche quelli molto lontani, risentono della perturbazione in  $y_1$ .

in cui  $T_1$  e  $T_2$  sono due temperature di riferimento. Per un parallelepipedo a sezione quadrata di lato  $a$  e lungo  $l \gg a$  con un foro cilindrico di raggio  $r$ , se  $T_1$  è la temperatura sulla superficie del foro e  $T_2$  è la temperatura esterna abbiamo ad esempio

$$F = \frac{2\pi l}{\ln(0.54a/r)} \quad (6.163)$$

In ogni caso per utilizzare con successo il metodo del fattore di forma occorre che qualcuno se lo sia calcolato, analogamente a quanto accade per i fattori di vista dell'irraggiamento termico.

## 6.4 Conduzione secondo Cattaneo-Vernotte

La legge di Fourier pur essendo supportata da un gran numero di verifiche sperimentali dirette non è la sola legge di propagazione del calore possibile. Inoltre è noto che l'equazione del calore che otteniamo utilizzando la legge di Fourier è *parabolica*, dunque ammette una velocità di propagazione infinita per il campo temperatura. Questo fa della teoria Fourieriana, un teoria dello scambio termico *non-locale* nel senso che una perturbazione di temperatura in un qualunque punto del dominio influenza *istantaneamente* tutti gli altri punti<sup>12</sup>. Per rendersene conto è sufficiente considerare la funzione di Green<sup>13</sup> dell'equazione del calore per un problema ai valori iniziali in uno spazio infinito  $n$ -dimensionale

<sup>12</sup>Anche la dinamica dei fluidi incomprimibili è una teoria di campo *non-locale*.

<sup>13</sup>Ricordiamo che la funzione di Green  $G(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_1, t_1)$  rappresenta la temperatura nel punto  $\mathbf{x}$  all'istante  $t$  dovuta ad una sorgente di calore posta in  $\mathbf{x}_1$  che inizia un rilascio di calore unitario all'istante  $t_1$ . Utilizzando tale definizione abbiamo, ovviamente

$$T(\mathbf{x}, t) = \int G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, 0) T(\mathbf{y}, 0) d\mathbf{y} \quad (6.164)$$

La funzione di Green è il nucleo di un operatore integrale che rappresenta l'evoluzione del sistema da uno stato di temperatura noto. Si tratta cioè di un operatore di evoluzione che ha significato analogo all'operatore di *scattering* (matrice  $S$ ) in meccanica quantistica

$$T(\mathbf{x}, t) = GT_0 \quad (6.165)$$

( $n = 1, 2, 3$ )

$$G(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_1, t_1) = \frac{1}{[4\pi\alpha(t-t_1)]^{n/2}} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)^2}{4\alpha(t-t_1)}} \quad (6.166)$$

In effetti se consideriamo la risposta del sistema ad una perturbazione localizzata nella forma  $T(\mathbf{y}, 0) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_1)$  abbiamo il seguente transitorio

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}, t) &= \int_V G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, 0) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_1) d\mathbf{y} \\ &= G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}_1, 0) \end{aligned} \quad (6.167)$$

cioè la  $\delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_1)$  viene avvertita *ovunque* dopo un tempo infinitesimo, chiaramente con intensità maggiore dai punti vicino ad  $\mathbf{y}_1$ . Infatti per  $t \rightarrow 0$  la funzione di Green  $G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}_1, 0)$  è una Gaussiana normalizzata con media  $\mathbf{y}_1$  e varianza tendente a zero cioè si tratta di una curva coincidente  $\delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_1)$ . In un istante di tempo infinitamente vicino a 0 abbiamo la comparsa della distribuzione Gaussiana, con varianza molto piccola e media  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1$ . Trattandosi di Gaussiana si ha un valore non nullo (seppur molto piccolo) ovunque sull'asse reale. Per porre rimedio a questa situazione sono state proposte altre leggi costitutive. Tali leggi hanno pertanto come obiettivo quello di formulare una teoria dello scambio termico *locale* che ammetta una velocità di propagazione finita della perturbazione di temperatura. Diciamo da subito comunque che la modifica della legge di Fourier e lo studio della corrispondente legge di conduzione ha suscitato maggiore interesse fra i fisici-matematici che non fra gli ingegneri.

#### 6.4.1 Legge costitutiva di Cattaneo

Nel 1948 Cattaneo scrisse un articolo intitolato “sulla conduzione del calore” in cui richiamò l'attenzione sul “paradosso” dovuto alla velocità infinita di propagazione di una perturbazione di temperatura nella conduzione Fourieriana. Impiegando un punto di vista molecolare per interpretare il fenomeno della conduzione nei solidi, Cattaneo propose la seguente modifica della legge di Fourier<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} q_i &= -k \left( \frac{\partial T}{\partial x^i} - \tau \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) \right) \\ &= -k \left( I - \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial T}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (6.168)$$

Se assumiamo che  $\tau$  sia *molto piccolo* possiamo espandere l'operatore lineare  $(I - \tau \frac{\partial}{\partial t})^{-1}$  in serie di Neumann trascurando i termini di ordine superiori ad uno in  $\tau$ , ottenendo

$$\left( I - \tau \frac{\partial}{\partial t} \right)^{-1} \simeq I + \tau \frac{\partial}{\partial t} \quad (6.169)$$

<sup>14</sup>L'argomento principale a addotto per questa modifica era un ritardo temporale di una molecola per passare da una isoterma a temperatura  $T$  ad una a temperatura  $T - dT$ . Tale ritardo è proporzionale attraverso una costante di tempo alla variazione nel tempo del gradiente di temperatura. Dunque è come se il gradiente di temperatura non fosse solo determinato dal flusso di calore ma anche dalla sua derivata rispetto al tempo (vd. (6.170))

Con tale assunzione otteniamo l'equazione di Cattaneo

$$\boxed{q_i + \tau \dot{q}_i = -k \frac{\partial T}{\partial x^i}} \quad (6.170)$$

cioè il gradiente di temperatura è proporzionale al flusso di calore e alla sua derivata temporale (la legge di Fourier assume solo proporzionalità con il flusso di calore). Sostituendo la legge costitutiva (6.168) nell'equazione di Fourier otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial q_i}{\partial x^i} \\ &= \alpha \left( 1 - \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 T \end{aligned} \quad (6.171)$$

dalla quale, sempre impiegando (6.169) otteniamo

$$\boxed{\tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T} \quad (6.172)$$

Questa equazione è nota anche come *equazione del telegrafo*<sup>15</sup> ed è possibile dimostrare che essa ha soluzioni iperboliche per  $\tau > 0$ . In tali condizioni la velocità di propagazione della temperatura è

$$|V| = \sqrt{\frac{\alpha}{\tau}} \quad (6.174)$$

La soluzione analitica della (6.172) può essere calcolata agevolmente applicando il metodo della trasformata integrale, utilizzando il Laplaciano come generatore di autofunzioni. Se indichiamo con  $\hat{T}_k(t)$  il coefficiente di Fourier corrispondente al modo  $\Psi_k(\mathbf{x})$ , il cui autovalore è  $\lambda_k$ , è facile dimostrare che

$$\tau \frac{d^2 \hat{T}_k}{dt^2} + \frac{d \hat{T}_k}{dt} = \alpha \lambda_k \hat{T}_k(t) + B_k(t) \quad (6.175)$$

in cui

$$B_k(t) = \alpha \int_S \left[ \frac{\partial T}{\partial n} \Psi_k - \frac{\partial \Psi_k}{\partial n} T \right] dS \quad (6.176)$$

cioè salta fuori una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine (a coefficienti costanti) nel tempo per la trasformata della temperatura. Tale equazione si risolve molto rapidamente con una trasformata di Laplace.

**La misura del “secondo suono”** La piccolezza della costante  $\tau$  suggerisce che la velocità di propagazione della temperatura nel mezzo può essere effettuata solo con materiali aventi scarsa diffusività. La letteratura riporta esperimenti eseguiti con sabbie di vario tipo. Il fenomeno della conduzione iperbolica è stato osservato in esperimenti condotti sull'elio liquido (la comparsa del “secondo suono”), ma non è stato ancora determinato con

<sup>15</sup>Tale equazione nella sua forma originale è

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + (a + b) \frac{\partial h}{\partial t} + abh = c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (6.173)$$

e governa la dinamica della tensione o della corrente in un cavo elettrico.

certezza in altri esperimenti. Il problema fondamentale sta nella rilevazione sperimentale dell'onda termica che di norma ha ampiezza spesso sotto l'errore di un sistema di misura relativamente accurato. Dalla soluzione analitica dell'equazione di Cattaneo-Vernotte e dalla misura del transitorio di temperatura, in molti hanno tentato di determinare senza successo il valore della costante  $\tau$ . In pratica dalla conoscenza dell'insieme dei transitori parametrizzati con  $\tau$ , e dalla misura sperimentale si tenta di risalire al valore di  $\tau$  confrontando il transitorio misurato con uno teorico corrispondente ad un certo  $\tau$ .

#### 6.4.2 Implicazioni del secondo principio della termodinamica per i fenomeni di conduzione termica secondo Cattaneo

Consideriamo il secondo principio della termodinamica per un solido indeformabile in quiete rispetto al nostro sistema di coordinate

$$q^i T_{;i} \leq 0 \quad (6.177)$$

Vediamo quali sono le implicazioni di questo principio per fenomeni di conduzione iperbolica, che utilizzano l'equazione di Cattaneo. Consideriamo per semplicità coordinate cartesiane ortogonali

$$q_i \frac{\partial T}{\partial x^i} = -k \left( \frac{\partial T}{\partial x^i} \frac{\partial T}{\partial x^i} - \tau \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) \quad (6.178)$$

Poniamo  $g(\mathbf{x}, t) = |\nabla T|^2$ . L'equazione (6.178) equivale a

$$q_i \frac{\partial T}{\partial x^i} = -k \left( g - \frac{1}{2} \tau \frac{\partial g}{\partial t} \right) \quad (6.179)$$

Per  $k > 0$  il secondo principio della termodinamica impone che

$$\boxed{\frac{1}{2} \tau \frac{\partial g}{\partial t} - g \leq 0} \quad (6.180)$$

Inoltre abbiamo visto che la conduzione iperbolica si realizza per  $\tau > 0$ . Pertanto, se moltiplichiamo per  $2/\tau$  l'equazione (6.180) otteniamo

$$\frac{\partial g}{\partial t} \leq \frac{2}{\tau} g \quad (6.181)$$

In altre parole se la norma del gradiente resta limitata nel tempo, resta limitato pure il suo derivata nel tempo. Considerando il caso limite isoentropico (in (6.180) si considera il segno di uguaglianza), la soluzione di (6.180) è

$$g_{is}(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, 0) e^{2\frac{t}{\tau}} \quad (6.182)$$

in cui  $g(\mathbf{x}, 0) > 0$  è la distribuzione iniziale della norma del gradiente di temperatura. Notiamo che per  $\tau > 0$  la soluzione isoentropica della conduzione secondo Cattaneo è *divergente*. In altre parole il gradiente di temperatura resta ortogonale al flusso di calore solo se il primo se ne va ad infinito!. Consideriamo la soluzione formale di (6.181) nella forma

$$g(t) \leq g(0) + \frac{2}{\tau} \int_0^t g(t_1) dt_1 \quad (6.183)$$

Poiché tutte le quantità sono strettamente positive, possiamo applicare una recursione in (6.183), ottenendo

$$\begin{aligned}
 g(t) &\leq g(0) + \frac{2}{\tau}tg(0) + \frac{4}{\tau^2} \int_0^t \int_0^{t_1} g(t_2) dt_2 dt_1 \\
 &\leq g(0) \left(1 + \frac{2t}{\tau} + \frac{4t^2}{2\tau^2}\right) + \frac{4}{\tau^2} \int_0^t \int_0^{t_1} g(t_2) dt_2 dt_1 \\
 &\leq g(0) \left(1 + \frac{2t}{\tau} + \frac{4t^2}{2\tau^2} + \frac{8t^3}{6\tau^3}\right) + \frac{8}{6\tau^2} \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} g(t_3) dt_3 dt_2 dt_1 \\
 &\leq g(0) \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left(\frac{2t}{\tau}\right)^i + \sup [g] \frac{1}{n!} \left(\frac{2t}{\tau}\right)^n
 \end{aligned} \tag{6.184}$$

Se fissiamo  $t$  e supponiamo che  $\theta$  sia limitato in  $[0, t]$  allora dopo infinite ricorrenze il secondo termine va a  $0^{16}$  (per lo stesso motivo per cui la serie dell'esponenziale converge: il fattoriale di  $n$  cresce più in fretta di  $a^n$ ) e resta la serie di potenze di una funzione esponenziale.

$$\boxed{g(\mathbf{x}, t) \leq g(\mathbf{x}, 0) e^{2\frac{t}{\tau}}} \tag{6.188}$$

Pertanto la legge costitutiva di Cattaneo è compatibile con il secondo principio della termodinamica a patto che la norma del gradiente di temperatura in ogni punto e ad ogni istante di tempo sia minore di qualcosa che cresce in modo esponenziale (con esponente molto grande). Questa condizione *pone un limite* alle derivate temporali che compaiono nell'equazione di Cattaneo-Vernotte. In altre parole se  $\partial T/\partial t$  è troppo elevato il secondo principio della termodinamica potrebbe essere violato.

## 6.5 Problemi di conduzione termica inversa

Un problema “diretto” di conduzione consiste nella determinazione della distribuzione di temperatura nell'interno di un solido allorquando vengano specificate i parametri termofisici, le condizioni al contorno, le condizioni iniziali e l'equazione del calore. Per contro i problemi di conduzione termica *inversa* hanno come scopo la determinazione delle proprietà termofisiche, delle condizioni al contorno, della generazione di energia ecc... impiegando misure di temperatura in una più posizioni situate all'*interno* del solido. Matematicamente il problema di conduzione inversa appartiene alla classe di problemi *mal posti*. Si tratta di problemi la cui soluzione (quando esiste) può non essere unica, ed instabile per piccole variazioni di dati in ingresso. L'utilizzo più comune della conduzione termica inversa consiste nella stima del flusso superficiale di calore o distribuzione superficiale di temperatura attraverso misurazioni di temperatura di pochi sensori posizionati all'interno del solido. Le applicazioni di questa tecnica sono molteplici e di grande interesse ingegneristico.

<sup>16</sup>Per rendersene conto consideriamo la funzione  $g = t$  nell'intervallo  $[0, 1]$ . Abbiamo

$$\int_0^1 g(t_1) dt_1 = 1/2 \tag{6.185}$$

$$\int_0^1 \int_0^{t_1} g(t_2) dt_2 dt_1 = \int_0^1 \frac{t_1^2}{2} = 1/6 \tag{6.186}$$

$$\int_0^1 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} g(t_3) dt_3 dt_2 dt_1 = 1/24 \tag{6.187}$$

### 6.5.1 Metodi di soluzione

La difficoltà principale nella soluzione di un problema di conduzione termica inversa sta nel fatto che il problema stesso è mal posto. Sono stati proposti diversi metodi analitici e numerici per la soluzione di problemi “mal-posti”. Fra essi dominano i metodi statistici, di regolarizzazione (Tichonov), machine learning ecc... che hanno come obiettivo la *stima* di una funzione o di un parametro incognito sulla base di una serie di misurazioni eseguite un modesto numero di sensori (*sensor network*) posti nel dominio del fenomeno. Un problema analogo si incontra allorquando si tenta al esempio di ricostruire la dinamica dell’oceano o di fenomeni meteorologici basandosi su un numero limitato di misurazioni o quando si prova di localizzare la posizione di una sorgente che ha rilasciato un certo inquinante attraverso misurazioni effettuate in zone limitrofe. Il framework della conduzione termica inversa oggi è inquadrato in una disciplina nota come *data assimilation* in cui la parte “inversa” del problema viene risolta con metodi Bayesiani (filtri di Kalman, filtri di Kalman “di insieme”), di regolarizzazione attraverso metodo ai minimi quadrati, oppure risolvendo il problema “aggiunto”.

## 6.6 Cenni di conduzione termica stocastica

La conduzione termica stocastica si occupa delle soluzioni statistiche dell’equazione di Fourier in presenza da condizioni al contorno, parametri fisici e condizioni iniziali aleatorie. Benché questa disciplina sia in forte espansione, soprattutto in tempi recenti, l’ingegneria industriale non ha ancora recepito il messaggio e le potenzialità di impiego. I metodi principali per determinare la dipendenza della soluzione dai parametri aleatori del problema sono i seguenti. Metodo monte Carlo. Metodo di Galerkin basato su rappresentazioni ortogonali della soluzione in termini di funzioni di variabile aleatoria. Questa rappresentazione si basa sul lemma di Doob-Dynkin se il numero delle variabili aleatorie è finito. Per un numero infinito di variabili aleatorie gli unici risultati teorici sono quelli di Wiener-Cameron-Martin e Segall-Kailath. Metodo di collocazione spettrale stocastica. In pratica è la versione “nodale” del metodo di Galerkin. Metodi perturbativi.

## Capitolo 7

# Scambiatori di Calore

Per scambiatore di calore si intende generalmente una apparecchiatura che permette ad uno o più fluidi che si trovano a temperature differenti di scambiare energia termica. Le applicazioni sono diffusissime. Ogni macchina termica che opera secondo un ciclo termodinamico fra due o più serbatoi di calore necessita di almeno due scambiatori di calore. Le modalità con cui avviene lo scambio di energia possono essere svariate. Nelle tipologie più comuni i fluidi che scambiano energia termica sono separati da pareti metalliche che ne impediscono il contatto diretto. Pertanto lo scambio di energia termica avviene principalmente conduzione e convezione. Vi sono tuttavia anche applicazioni (caldaie ad irraggiamento) in cui lo scambio avviene principalmente per irraggiamento. In altre applicazioni (torri evaporative, camere di combustione di turbine a gas, serbatoi per rimozione di flash gas in impianti frigoriferi, ecc...) i fluidi che scambiano vengono in contatto diretto. Il *design* degli scambiatori di calore è una questione molto importante e delicata. I parametri di progetto sono molti e dipendenti dal tipo di applicazione a cui lo scambiatore è destinato. Fra essi possiamo indicare, genericamente: le dimensioni (scambiatori compatti od estesi), la potenza scambiata per unità di superficie o per unità di volume, l'efficienza di scambio, la caduta di pressione, il costo. I dettagli costruttivi influenzano più o meno tutti i parametri sopra riportati e la scelta di una tipologia di scambiatore piuttosto che un'altra è spesso dettata da esigenze specifiche.

### 7.1 Classificazione degli scambiatori di calore

Gli scambiatori di calore sono costruiti in varie tipologie, dimensioni e configurazioni di flusso. Al fine di individuare delle caratteristiche comuni è utile studiare una classificazione, peraltro del tutto arbitraria.

#### 7.1.1 Classificazione basata sul meccanismo di scambio

Negli scambiatori di calore lo scambio di potenza può avvenire per *contatto diretto* o per *contatto indiretto* fra i fluidi che passano nello scambiatore. In quest'ultimo caso i fluidi sono fisicamente separati, solitamente da pareti metalliche (tubi) ed lo scambio avviene principalmente per conduzione e convezione. Alcuni esempi di scambiatore a contatto diretto sono: una torre di raffreddamento, una camera di combustione in una turbina a gas, un raffreddatore d'aria del tipo water-mist.

### 7.1.2 Classificazione basata sulla compattezza

La definizione di compattezza è qualcosa di relativamente arbitrario. È ovvio il tentativo di costruire degli scambiatori di calore che massimizzino lo scambio di energia per unità di volume (scambiatori compatti), mantenendo le perdite di pressione ed i costi di fabbricazione a livelli ragionevoli. Poiché la potenza termica scambiata è direttamente proporzionale alla superficie di scambio, si parla anche di massimizzazione della superficie di scambio per unità di volume. Uno scambiatore che eccede il valore di  $700 \text{ m}^2/\text{m}^3$  viene considerato “compatto”. I radiatori per auto hanno densità di area intorno a  $1100 \text{ m}^2/\text{m}^3$ . Nel mondo animale e vegetale l'evoluzione ha selezionato esemplari che possiedono organi per lo scambio di calore aventi una densità di area dell'ordine di  $20000 \text{ m}^2/\text{m}^3$ . La moderna tecnologia degli scambiatori a microcanali ha valori molto elevati<sup>1</sup> di densità di area. Al fine di incrementare la superficie di scambio a parità di volume sono state proposte varie tecnologie. Nell'ingegneria termotecnica classica si utilizzano lamierini, alette di raffreddamento, tubi ed intercapedini corrugati, ecc...

### 7.1.3 Classificazione basata sulle caratteristiche costruttive

#### Scambiatori di calore a fascio tubiero

Sono molto comuni e di grande diffusione nella pratica industriale. Lo scambio di calore può avvenire fra *liquido-liquido*, *liquido-gas* oppure *gas-gas*. Di norma si hanno anche dei cambiamenti di stato in uno dei due fluidi. È il caso dei condensatori e degli evaporatori. Nelle caldaie di casa invece abbiamo uno scambio aria-acqua senza evaporazione. È possibile incrementare lo scambio termico utilizzando tubi alettati internamente e/o esternamente.

#### Scambiatori di calore a piastra

Hanno solitamente forma di parallelepipedo e sono relativamente sottili. Il contatto avviene normalmente su una delle due facce piane. Il fattore di compattezza degli scambiatori a piastra è di solito dell'ordine di  $200 \text{ m}^2/\text{m}^3$ , dunque essi possono definirsi non compatti.

#### Scambiatori di calore a piastra alettata

Il fattore di compattezza può essere incrementato fino a valori di  $6000 \text{ m}^2/\text{m}^3$  montando delle alette e/o delle corrugazioni all'interno (scambiatore per loop-termosiphon) o all'esterno (dissipatori di calore per componenti elettronici) dello scambiatore.

#### Scambiatori di calore a tubi alettati

Sono diffusissimi nella tecnologia del condizionamento dell'aria in appartamenti. Un esempio di tale tipologia di scambiatore di calore è il condensatore che si vede sui terrazzi, o montato vicino alle finestre di case e condomini. Il massimo fattore di compattezza ottenibile è relativamente modesto  $330 \text{ m}^2/\text{m}^3$ , molto inferiore ad uno scambiatore a piastra alettata.

---

<sup>1</sup>Un condensatore a microcanali per una centrale di qualche megawatt ha un volume di qualche decina di litri.

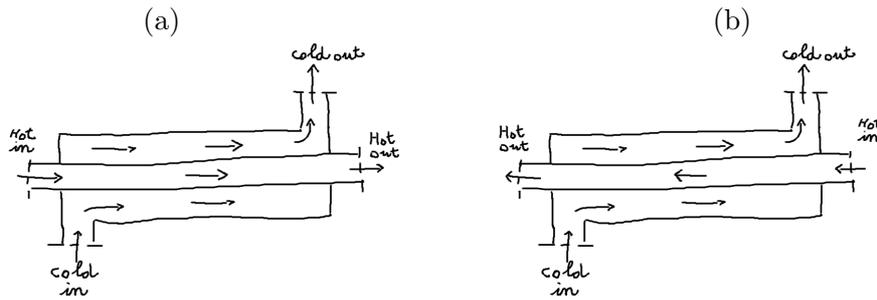


Figura 7.1: Scambiatore equicorrente (a) e controcorrente (b)

### Scambiatori rigenerativi

La tipologia più nota è quella a tamburo rotante che viene impiegata ad esempio nelle moderne caldaie ad irraggiamento come pre-riscaldatore di aria (Ljungstrom). Viene impiegato talvolta anche nelle caldaie a recupero in cicli combinati gas/vapore.

#### 7.1.4 Classificazione basata sulla modalità fisiche di scambio termico

La classificazione degli scambiatori di calore basata sul meccanismo di scambio termico fra fluidi include

1. Scambiatori *monofase*. Alcuni esempi sono gli scambiatori aria-aria o aria-acqua in assenza di ebollizione e condensazione. Rientrano in questa classe: i dissipatori alletati per componenti elettronici; i radiatori per auto e moto; gli scambiatori delle caldaie di casa per riscaldare l'acqua sanitaria; gli scambiatori rigenerativi per turbogas.
2. Scambiatori *bifase* in cui si ha un cambiamento di stato di uno o più fluidi. Alcuni esempi sono i condensatori e gli evaporatori degli impianti frigoriferi, i condensatori degli impianti a vapore, la sezione di vaporizzazione di una moderna caldaia ad irraggiamento.

#### 7.1.5 Classificazione basata sulla geometria del flusso

È ovviamente impossibile proporre una classificazione che sia esaustiva per tutte le geometrie di flusso realizzabili praticamente. Tuttavia è molto utile individuare delle classi il cui studio ci aiuta a comprendere alcuni aspetti fondamentali di efficienza di scambio. Se consideriamo uno scambiatore che opera con due fluidi possiamo avere

1. flussi paralleli ed equiversi (equicorrente);
2. flussi opposti (controcorrente);
3. flussi incrociati;
4. multipassaggi.

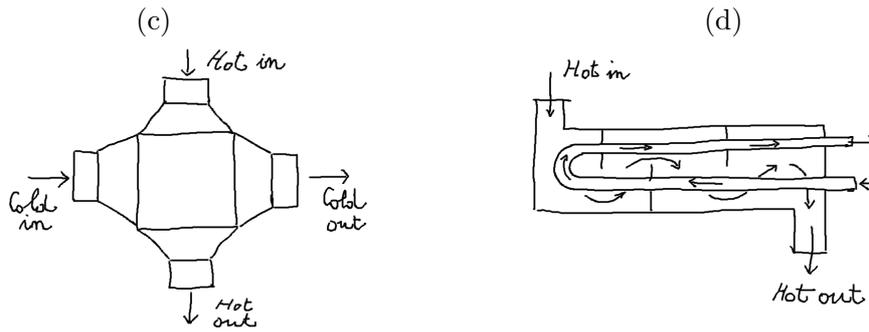


Figura 7.2: Scambiatore a flussi incrociati (c) ed a passaggi multipli (d).

Tali geometrie del flusso sono schematizzate in figura 7.1 e figura 7.2. È opportuno rilevare che gli schemi riportati sono schemi di massima. In altre parole uno scambiatore in geometria controcorrente potrebbe presentare un fascio tubiero interno, alettamenti vari e altri dettagli costruttivi, che in figura 7.1(b) vengono schematizzati comunque come un solo tubo.

## 7.2 Distribuzione di temperatura negli scambiatori di calore

In uno scambiatore di calore monofase in regime stazionario, il trasferimento di energia dal fluido caldo al fluido freddo induce una variazione di temperatura in entrambi i fluidi. Per rappresentare graficamente tale variazione ci si avvale di una schematizzazione che impiega una coordinata curvilinea nella direzione di sviluppo dello scambiatore, in modo del tutto analogo a quanto si fa per rappresentare le coordinate termodinamiche lungo un ugello di de-Laval. Possiamo avere diversi casi dipendentemente dalla geometria del flusso e dal meccanismo con cui avviene lo scambio termico:

1. scambiatore equicorrente o controcorrente monofase;
2. scambiatore equicorrente o controcorrente in presenza di un cambiamento di stato (condensazione o evaporazione) di uno od entrambi i fluidi;
3. scambiatore multipassaggio o a correnti incrociate monofase o bifase (tipico condensatore per applicazioni di condizionamento o condensatori per centrali elettriche).

Dalla distribuzione di temperatura per scambiatori monofase in equicorrente o controcorrente si deduce che gli scambiatori controcorrente hanno teoricamente una efficienza migliore. Ad esempio se in un certo scambiatore a fascio tubiero a flusso parallelo si sbaglia a attaccare i tubi di ingresso e uscita del fluido caldo o del fluido freddo e si realizza per errore un flusso equicorrente, la potenza scambiata si riduce.

Per l'analisi ed il progetto degli scambiatori di calore si considerano classicamente due metodi differenti: il metodo della temperatura media logaritmica ed il metodo  $\varepsilon - NTU^2$ .

<sup>2</sup>Come vedremo  $\varepsilon$  rappresenta l'efficienza dello scambiatore di calore mentre NTU (Number of (heat) Transfer Units) è un parametro adimensionale che individua il numero delle unità di calore trasferite da un fluido all'altro. Il metodo  $\varepsilon - NTU$  dunque rappresenta la forma adimensionale delle prestazioni di uno scambiatore di calore ed il legame fra  $\varepsilon$  ed NTU si determina analiticamente per ogni tipologia di scambiatore.

Entrambi possono essere utilizzati sia per l'analisi che per il progetto dello scambiatore. Tuttavia, dipendentemente dai parametri di progetto che si hanno a disposizione un metodo può essere più conveniente dell'altro.

### 7.3 Analisi degli scambiatori di calore con il metodo della temperatura media logaritmica

Nell'analisi termica di uno scambiatore di calore, una delle quantità che interessa maggiormente è ovviamente quanta potenza scambia lo scambiatore. Preferibilmente ci piacerebbe avere una espressione analitica e *semplice* che esprima tale grandezza. A tal fine è conveniente considerare<sup>3</sup> la formula

$$Q = K_m S \Delta T_m \quad (7.1)$$

in cui  $\Delta T_m$  (detta *differenza di temperatura effettiva*) è una quantità che vogliamo determinare e che dipende dalle temperature dei fluidi che entrano nello scambiatore di calore e dalla geometria del flusso. Nel caso di scambiatori equicorrente o controcorrente troveremo che  $\Delta T_m$  è la differenza di temperatura media logaritmica. Per altre geometrie di flusso le espressioni son molto più complesse. Il coefficiente globale di scambio termico medio  $K_m$  rappresenta la potenza effettiva che si scambiano i fluidi per unità di superficie di scambio ed unità di differenza di temperatura fra i fluidi. Il pedice "m" ricorda che il coefficiente globale di scambio è un valore *medio* per lo scambiatore. Esso tiene conto dei fenomeni di convezione interna ed esterna, della conduzione attraverso gli elementi metallici dello scambiatore, dei possibili fenomeni di *fouling* dovuti, ad esempio, al possibile deposito di sostanze calcaree, prodotti di combustione, corrosione ecc... Ricordiamo che il classico coefficiente globale di scambio termico si ottiene invertendo la resistenza termica globale. Per il caso di scambio fra due fluidi separati da una parete metallica di un tubo cilindrico di raggi  $r_i$  ed  $r_e$ , ovviamente

$$R = \frac{1}{2\pi r_i L h_i} + \frac{\ln(r_e/r_i)}{2\pi k L} + \frac{1}{2\pi r_e L h_e} + \frac{R_{f_i}}{2\pi r_i L} + \frac{R_{f_e}}{2\pi r_e L} \quad (7.2)$$

in cui  $R_{f_i}$  ed  $R_{f_e}$  sono resistenze termiche dovute al fouling interno ed esterno<sup>4</sup>.

#### 7.3.1 Scambiatori monofase a passaggio singolo in geometria di flusso equicorrente o controcorrente

Consideriamo uno scambiatore di calore a passaggio singolo in geometria di flusso equicorrente (il caso controcorrente si tratta in modo del tutto analogo).

---

<sup>3</sup>È interessante notare come la quantificazione dello scambio termico è sempre riportata in forma di prodotto di una superficie per un coefficiente di scambio per una certa funzione delle temperature dei corpi che scambiano. Ciò avviene per la conduzione, per la convezione, per l'irraggiamento, e per uno scambio misto. In questo caso la temperatura varia lungo lo scambiatore per cui dobbiamo considerare una sequenza di scambi elementari, quantificati con il coefficiente globale di scambio locale.

<sup>4</sup>La potenza trasferita per fouling ha espressione

$$Q = \frac{S}{R_f} \Delta T \quad (7.3)$$

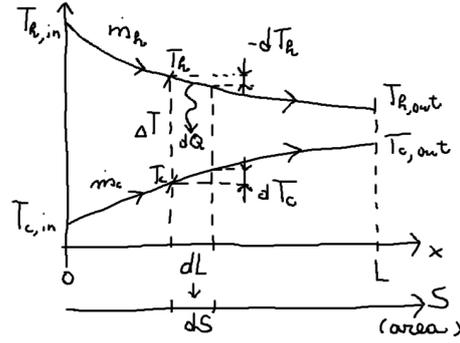


Figura 7.3: Nomenclatura per la derivazione della temperatura media logaritmica. Il grafico rappresenta uno scambiatore monofase equicorrente

Con riferimento alla figura 7.3 notiamo che un tratto infinitesimo  $dL$  nella direzione del flusso individua un'area di scambio  $dA$ . Applicando il primo principio della termodinamica per sistemi aperti ad entrambi i fluidi “hot” e “cold” scriviamo

$$dQ = -\dot{m}_h dh_h \quad (7.4)$$

$$dQ = \dot{m}_c dh_c \quad (7.5)$$

Se assumiamo i fluidi *liquidi* oppure *gas perfetti* (non consideriamo cioè condensazione o evaporazione) possiamo scrivere la variazione di entalpia come  $dh = c_p dT$ . Pertanto

$$dQ = -\dot{m}_h c_{ph} dT_h \quad (7.6)$$

$$dQ = \dot{m}_c c_{pc} dT_c \quad (7.7)$$

D'altra parte lo scambio di calore fra i due fluidi attraverso l'area  $dS$  può anche essere caratterizzato attraverso il coefficiente globale di scambio termico “locale”, cioè valido per l'area  $dS$ , come segue<sup>5</sup>

$$dQ = dSK(T_h - T_c) = dSK\Delta T \quad (7.8)$$

Dalle (7.6) e (7.7) otteniamo

$$dT_h - dT_c = \underbrace{d(T_h - T_c)}_{\Delta T} = -dQ \underbrace{\left( \frac{1}{\dot{m}_c c_{pc}} + \frac{1}{\dot{m}_h c_{ph}} \right)}_B \quad (7.9)$$

Ora eliminiamo  $dQ$  dalle (7.8) e (7.9), ottenendo

$$\frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -KBdS \quad (7.10)$$

<sup>5</sup>Chiaramente abbiamo trascurato alcuni infinitesimi di ordine superiore. In effetti la temperatura da considerare nel tratto di scambiatore lungo  $dL$  e di area  $dS$  sarebbe la media fra quella di uscita e quella di ingresso. Considerare questa temperatura media fa saltare fuori degli infinitesimi del secondo ordine (es.  $dT_h dS$ ) nell'espressione di  $dQ$  che possono essere trascurati.

Se integriamo la precedente equazione lungo su tutta la lunghezza dello scambiatore ed assumiamo  $B$  costante<sup>6</sup> otteniamo

$$\ln \left( \frac{\Delta T_{out}}{\Delta T_{in}} \right) = -BS \underbrace{\frac{1}{S} \int_0^S K dS}_{K_m} \quad (7.11)$$

in  $K_m$  è il coefficiente di scambio termico medio lungo lo scambiatore. Nelle stesse ipotesi, se integriamo la (7.9) per tutta la lunghezza dello scambiatore abbiamo

$$\Delta T_{out} - \Delta T_{in} = -BQ \quad (7.12)$$

Le (7.11) e (7.12) ci permettono di eliminare  $B$  ottenendo

$$\boxed{Q = K_m S \Delta T_m} \quad (7.13)$$

ove

$$\Delta T_m := \frac{\Delta T_{out} - \Delta T_{in}}{\ln(\Delta T_{out}/\Delta T_{in})} \quad (7.14)$$

è la differenza di temperatura media logaritmica. Notiamo che se scambiamo  $\Delta T_{out}$  con  $\Delta T_{in}$   $\Delta T_m$  resta invariato. Fissate le temperature  $T_{h,in}$ ,  $T_{h,out}$ ,  $T_{c,in}$ ,  $T_{c,out}$  uno scambiatore ad un singolo passaggio in controcorrente scambia più calore a parità di superficie e di coefficiente globale di scambio. Ciò è dovuto al fatto che  $B$  è più piccolo per il controcorrente.

### Geometria di flusso controcorrente

Ripetiamo la dimostrazione per uno scambiatore controcorrente impiegando la notazione della figura 7.7. È facile rendersi conto che il risultato è esattamente identico a patto di sostituire  $\Delta T_{in}$  con  $\Delta T_1$  e  $\Delta T_{out}$  con  $\Delta T_2$  (o viceversa). Infatti seguendo lo la direzione di sviluppo dello scambiatore

$$dQ = \dot{m}_h c_{ph} dT_h \quad (7.15)$$

$$dQ = \dot{m}_c c_{pc} dT_c \quad (7.16)$$

da cui

$$d(T_h - T_c) = dQ \left( \frac{1}{\dot{m}_h c_{ph}} - \frac{1}{\dot{m}_c c_{pc}} \right) = dQB_1 \quad (7.17)$$

Inoltre

$$dQ = K (T_h - T_c) dS \quad (7.18)$$

Eliminando  $dQ$  ed integrando lungo lo scambiatore troviamo (nell'ipotesi di  $B$  costante)

$$\ln \left( \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right) = K_m B_1 S \quad \Delta T_2 = T_{h,in} - T_{c,out}, \quad \Delta T_1 = T_{h,out} - T_{c,in} \quad (7.19)$$

Infine integriamo (7.17) ottenendo  $\Delta T_2 - \Delta T_1 = QB_1$  che sostituita nella precedente permette di eliminare  $B_1$  e fornisce

$$Q = K_m S \Delta T_m \quad (7.20)$$

con

$$\Delta T_m = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln(\Delta T_2/\Delta T_1)} \quad (7.21)$$

<sup>6</sup>Assumere  $B$  costante equivale ad assumere  $c_{pc}$  e  $c_{ph}$  costanti.

### 7.3.2 Scambiatori multipassaggio ed a correnti incrociate

Per queste geometrie di flusso è possibile determinare delle espressioni analitiche nella forma (7.1) in cui però l'espressione della differenza di temperatura effettiva  $\Delta T_m$  è molto complicata. Pertanto è conveniente introdurre un *fattore di correzione*  $F$  in modo tale che il metodo del salto medio logaritmico sia ancora applicabile. In particolare si definisce  $F$  attraverso

$$\Delta T_{corr} = F \Delta T_m \quad (7.22)$$

ove  $\Delta T_m$  è calcolato per uno scambiatore *controcorrente*<sup>7</sup> cioè con

$$\Delta T_{in} = T_{h,out} - T_{c,in} \quad (7.23)$$

$$\Delta T_{out} = T_{h,in} - T_{c,out} \quad (7.24)$$

$$(7.25)$$

La potenza totale scambiata fra i fluidi che transitano nello scambiatore si esprime come

$$Q = K_m S F \Delta T_m \quad (7.26)$$

Il fattore di correzione della temperatura media logaritmica viene graficato per varie geometrie in funzione dei parametri adimensionali  $P$  (efficienza di scambio lato tubi) ed  $R$  definiti come

$$P = \frac{(Q)_{\text{lato tubo}}}{(Q_\infty)_{\text{lato tubo}}} = \frac{t_2 - t_1}{T_1 - t_1} \quad (\text{efficienza di scambio lato tubi})$$

$$R = \frac{(\dot{m}c_p)_{\text{lato tubo}}}{(\dot{m}c_p)_{\text{lato involucro}}} = \frac{T_2 - T_1}{t_2 - t_1} \quad (7.27)$$

in cui  $t_1$  e  $t_2$  sono le temperature di ingresso e uscita del fluido che scorre nei tubi, mentre  $T_1$  e  $T_2$  sono le temperature di ingresso ed uscita del fluido che scorre esternamente ai tubi. In figura 7.4 riportiamo il grafico del fattore di correzione due differenti tipi di scambiatori. Notiamo che generalmente è  $F < 1$ . Vi sono comunque casi in cui, per assegnate temperature dei fluidi, risulta  $F > 1$ . Ciò significa che in quelle condizioni quello scambiatore funziona meglio di quello controcorrente, a parità di superficie e di coefficiente di scambio. Inoltre  $P \in [0, 1]$  mentre  $R \in [0, \infty]$ . Il caso  $R \rightarrow 0$  si ha in condizioni di evaporazione o condensazione del fluido lato involucro, mentre  $R \rightarrow \infty$  corrisponde al caso di evaporazione o condensazione del fluido lato tubi.

## 7.4 Analisi degli scambiatori di calore con il metodo dell'efficienza $\varepsilon$ – NTU (Kays & London)

L'analisi ed il progetto degli scambiatori di calore cioè la determinazione della potenza scambiata, della perdita di carico dei fluidi, della superficie di scambio ecc... può essere eseguita in modo completo attraverso il metodo della temperatura media effettiva, eventualmente corretta con il fattore di correzione  $F$ , se sono note le temperature di ingresso

<sup>7</sup>Il motivo per cui si utilizza lo scambiatore controcorrente come riferimento per il fattore di correzione è dovuto al fatto che le prestazioni di tale scambiatore sono di norma le migliori a parità di superficie e coefficiente globale di scambio. Ciò significa  $F < 1$ . Esistono tuttavia dei casi in cui  $F > 1$ , vd. ad esempio lo scambiatore ad una shell con due passaggi di figura 7.4(b).

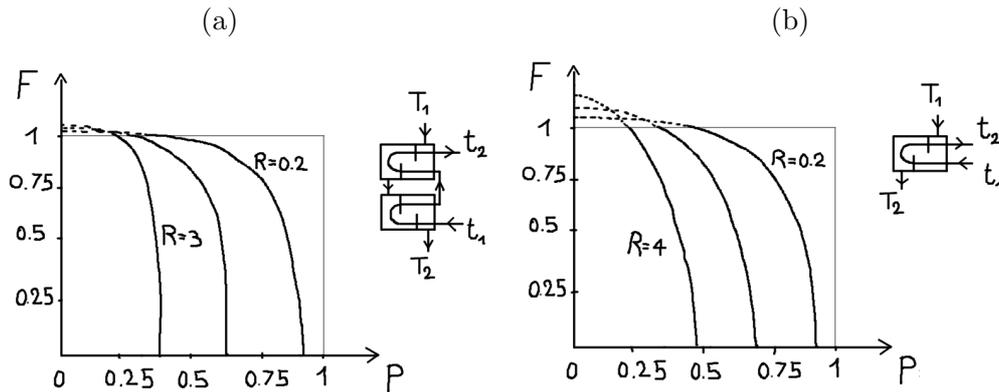


Figura 7.4: Fattori di correzione per uno scambiatore a due shell e due passaggi (a) ed uno ad una shell e due passaggi (b). Notare che di norma  $F < 1$ . Tuttavia vi sono configurazioni di flusso per cui  $F > 1$  in entrambi i casi.

e di uscita dei fluidi, la superficie di scambio ed il coefficiente di scambio termico globale medio. Capitano spesso situazioni in cui sono note solo le temperature di ingresso, le portate in massa dei fluidi ed il coefficiente globale di scambio. In questi casi non possiamo utilizzare direttamente il metodo della temperatura media effettiva poiché non conosciamo le temperature di uscita dei fluidi. Possiamo comunque utilizzare tale metodo in un ciclo iterativo. In pratica attraverso le iterazioni ricerchiamo quel valore delle temperature di uscita per cui il calore scambiato dai due fluidi all'interno dello scambiatore è pari a  $Q = K_m S F \Delta T_m$ . Questo calcolo si svolge come segue

1. si scelgono arbitrariamente le temperature di uscita e si determinano  $P$ ,  $R$  ed il fattore di correzione  $F(P, R)$ .
2. si calcola il salto medio logaritmico per le condizioni di scambiatore controcorrente ed il salto medio corretto  $F \Delta T_m$
3. si calcola la potenza totale  $Q = K_m S \Delta T_{corr}$
4. con tale valore di  $Q$  si calcolano le temperature di uscita usando  $Q = \dot{m}_i c_{pi} \Delta T_i$ . Se tali temperature coincidono con quelle utilizzate al punto 1) il calcolo iterativo termina. Altrimenti si torna al punto 1) modificando le temperature.

Un metodo alternativo che semplifica considerevolmente la soluzione del problema di analisi e progetto se le temperature di uscita non sono note è il metodo  $\varepsilon - NTU$  sviluppato da Kays & London. Consideriamo uno scambiatore di calore e definiamo *efficienza* la quantità

$$\varepsilon = \frac{Q}{Q_{max}} \quad (7.28)$$

in cui  $Q$  è la potenza effettivamente scambiata mentre  $Q_{max}$  è la *massima potenza scambiabile fra i due fluidi* che circolano nello scambiatore. Tale massimo si realizza in una ipotetica configurazione di flusso controcorrente in cui il fluido con valore *minimo* di  $\dot{m}c_p$  viene raffreddato da  $T_{h,in}$  a  $T_{c,in}$  (utilizzando uno scambiatore di lunghezza infinita). Questa situazione è illustrata con chiarezza nel grafico potenza-temperatura di figura 7.5 (a).

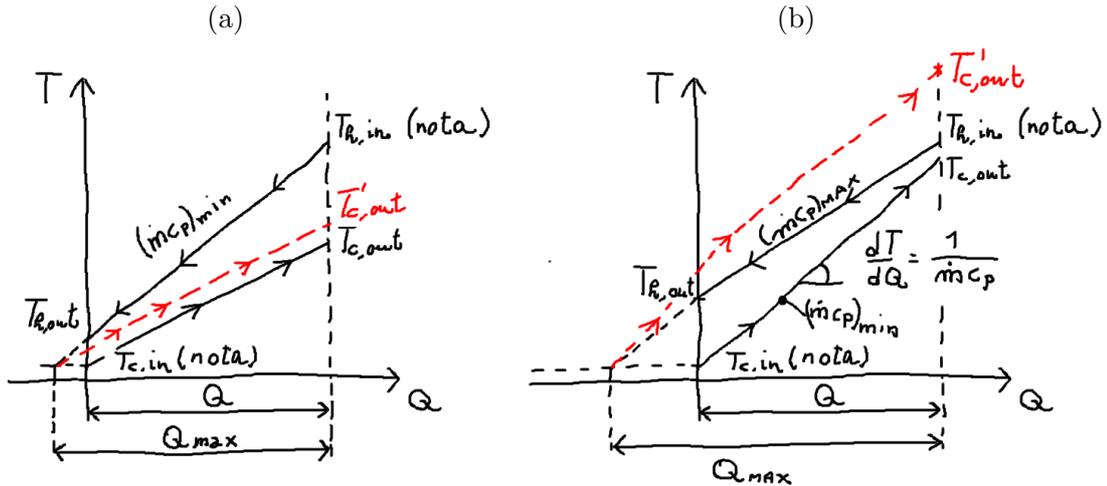


Figura 7.5: Grafico  $Q - T$  per lo scambiatore controcorrente e massima potenza scambiabile. La situazione di figura (b) non può realizzarsi dato che si avrebbe una temperatura di uscita del fluido freddo superiore a  $T_{h,in}$ .

È chiaro che se utilizzassimo  $(\dot{m}c_p)_{max}$  nella definizione di potenza massima, il fluido freddo si scalderebbe a temperature superiori a  $T_{h,in}$ , cosa ovviamente impossibile (vf. figura 7.5 (b)). Quindi abbiamo

$$Q_{max} = (\dot{m}c_p)_{min} (T_{h,in} - T_{c,in}) \quad (7.29)$$

ed anche, utilizzando la definizione di efficienza,

$$Q = \varepsilon (\dot{m}c_p)_{min} (T_{h,in} - T_{c,in}) \quad (7.30)$$

Se l'efficienza  $\varepsilon$  dello scambiatore fosse nota, utilizzando (7.30) potremmo risolvere il problema del calcolo della potenza scambiata conoscendo solo le temperature di ingresso. In generale  $\varepsilon$  viene collegata ad un parametro fondamentale detto NTU (Numero di Unità di calore Trasferite) ed al parametro  $C = (\dot{m}c_p)_{min} / (\dot{m}c_p)_{max}$  detto *rapporto di capacità*. La relazione  $\varepsilon - NTU$  è differente da scambiatore a scambiatore e si calcola per via teorica in casi semplici. Per contro la (7.30) è la stessa per tutti gli scambiatori, proprio per definizione di efficienza. L'efficienza è un numero sempre minore di 1, cioè non esistono scambiatori che possono funzionare meglio di uno scambiatore in controcorrente di dimensione infinita in cui il fluido caldo è quello avente valore minimo di  $\dot{m}c_p$ .

#### 7.4.1 Determinazione del legame $\varepsilon$ -NTU per scambiatori monofase equicorrente ad un solo passaggio

Abbiamo visto che per uno scambiatore monofase ad un solo passaggio in geometria di flusso equicorrente sussiste la relazione

$$\ln \left( \frac{\Delta T_{out}}{\Delta T_{in}} \right) = -BK_m S \quad (7.31)$$

in cui

$$B = \frac{1}{\dot{m}_c c_{pc}} + \frac{1}{\dot{m}_h c_{ph}} \quad (7.32)$$

Invertiamo tale relazione per ottenere

$$T_{h,out} - T_{c,out} = (T_{h,in} - T_{c,in}) e^{-BK_m S} \quad (7.33)$$

Ora notiamo che

$$Q = \dot{m}_c c_{pc} (T_{c,out} - T_{c,in}) = \dot{m}_h c_{ph} (T_{h,in} - T_{h,out}) \quad (7.34)$$

Con le definizioni  $C_h = \dot{m}_h c_{ph}$ ,  $C_c = \dot{m}_c c_{pc}$ ,  $C_{min} = \min\{C_c, C_h\}$ , dall'uguaglianza fra (7.30) e (7.34) otteniamo

$$\varepsilon = \frac{C_h (T_{h,in} - T_{h,out})}{C_{min} (T_{h,in} - T_{c,in})} \quad (7.35)$$

$$\varepsilon = \frac{C_c (T_{c,out} - T_{c,in})}{C_{min} (T_{h,in} - T_{c,in})} \quad (7.36)$$

Ora vogliamo eliminare tutte le temperature e restare con una relazione fra  $\varepsilon$ ,  $C_h$ ,  $C_c$  e  $C_{min}$ . A tal fine è sufficiente esprimere il primo membro di (7.33) in funzione di  $(T_{h,in} - T_{c,in})$ , cosa che possiamo fare subito confrontando (7.35) con (7.36)

$$\begin{aligned} T_{h,in} - T_{h,out} &= \frac{C_{min}}{C_h} \varepsilon (T_{h,in} - T_{c,in}) \\ T_{c,out} - T_{c,in} &= \frac{C_{min}}{C_c} \varepsilon (T_{h,in} - T_{c,in}) \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro otteniamo

$$T_{h,out} - T_{c,out} = (T_{h,in} - T_{c,in}) - C_{min} \left( \frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_h} \right) \varepsilon (T_{h,in} - T_{c,in})$$

Sostituiamo in (7.33)

$$1 - C_{min} \left( \frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_h} \right) \varepsilon = e^{-BK_m S} \quad (7.37)$$

Ricordiamo che  $B = 1/C_c + 1/C_h$ , dunque possiamo scrivere tutto

$$\varepsilon = \frac{1 - e^{-\frac{K_m S}{C_{min}} \left( \frac{C_{min}}{C_c} + \frac{C_{min}}{C_h} \right)}}{\frac{C_{min}}{C_c} + \frac{C_{min}}{C_h}} \quad (7.38)$$

Definiamo le quantità adimensionali

$$NTU = \frac{K_m S}{C_{min}} \quad (\text{Number of (heat) Transfer Units}) \quad (7.39)$$

$$C = \frac{C_{min}}{C_{max}} \in [0, 1] \quad (\text{rapporto di capacit\`a}) \quad (7.40)$$

Otteniamo

$$\varepsilon = \frac{1 - e^{-NTU(1+C)}}{1 + C} \quad (7.41)$$

Questa equazione fornisce la relazione fra l'efficienza  $\varepsilon$ , il numero di unità di calore trasferite (NTU) ed il rapporto di capacità ( $C$ ), essendo tutti questi parametri adimensionali. Dunque essa rappresenta una forma adimensionalizzata delle prestazioni dello scambiatore di calore. La relazione  $\varepsilon(NTU, C)$  è del tutto teorica e può essere disegnata senza eseguire gli esperimenti se la geometria del flusso è ragionevolmente semplice.

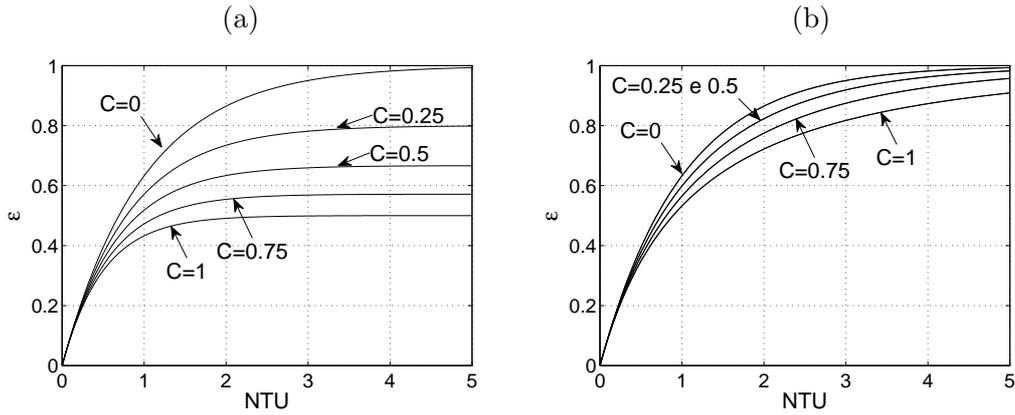


Figura 7.6: Relazione  $\varepsilon - NTU$  per scambiatori monofase ad un solo passaggio equicorrente (a) e controcorrente (b). La curva corrispondente a rapporti di capacità  $C = 0$  è la stessa in entrambi i grafici e si riferisce ad un caso limite di scambiatore bifase per il quale vale sempre  $\varepsilon = \varepsilon_{max} = 1 - e^{-NTU}$ .

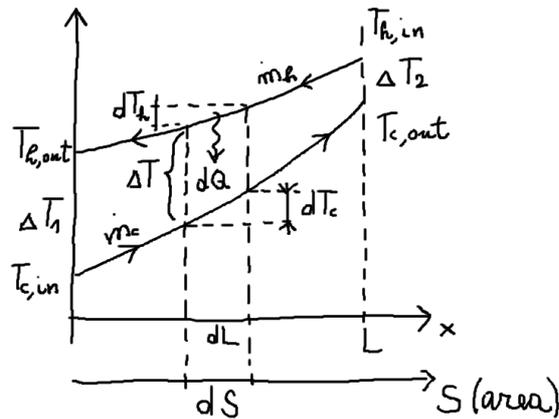


Figura 7.7: Notazione per la dimostrazione della relazione  $\varepsilon - NTU$  in controcorrente ad un solo passaggio.

#### 7.4.2 Determinazione del legame $\varepsilon - NTU$ per scambiatori monofase in controcorrente ad un solo passaggio

In questa sezione, come esercizio, ricaviamo la relazione  $\varepsilon - NTU$  per uno scambiatore in controcorrente ad un solo passaggio. Il risultato è

$$\varepsilon = \frac{1 - e^{-NTU(1-C)}}{1 - C e^{-NTU(1-C)}} \quad (7.42)$$

e ci accingiamo a dimostrarlo. Con riferimento alla figura 7.7 notiamo che

$$dQ = \dot{m}_h c_{ph} dT_h = C_h dT_h \quad (7.43)$$

$$dQ = \dot{m}_c c_{pc} dT_c = C_c dT_c \quad (7.44)$$

Definiamo  $\Delta T = T_h - T_c$ . Abbiamo

$$d(\Delta T) = dQ \left( \frac{1}{C_h} - \frac{1}{C_c} \right) = dQB_1 \quad (7.45)$$

D'altra parte, per il tratto lungo  $dL$  i fluidi scambiano il seguente calore attraverso  $dS$

$$dQ = KdS\Delta T \quad (7.46)$$

Pertanto

$$\ln \left( \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right) = K_m S B_1 \quad (7.47)$$

Invertendo tale relazione abbiamo

$$T_{h,in} - T_{c,out} = (T_{h,out} - T_{c,in}) e^{K_m S B_1} \quad (7.48)$$

A questo punto conviene sommare e sottrarre  $T_{c,in}$  al primo membro e sommare e sottrarre  $T_{h,in}$  al secondo

$$T_{h,in} - T_{c,in} + T_{c,in} - T_{c,out} = (T_{h,out} - T_{h,in} + T_{h,in} - T_{c,in}) e^{K_m S B_1} \quad (7.49)$$

Ora sostituiamo in (7.49)

$$T_{c,out} - T_{c,in} = \varepsilon \frac{C_{min}}{C_c} (T_{h,in} - T_{c,in}) \quad (7.50)$$

$$T_{h,in} - T_{h,out} = \varepsilon \frac{C_{min}}{C_h} (T_{h,in} - T_{c,in}) \quad (7.51)$$

e semplifichiamo ( $T_{h,in} - T_{c,in}$ ) ottenendo

$$1 - \varepsilon \frac{C_{min}}{C_c} = \left( -\varepsilon \frac{C_{min}}{C_h} + 1 \right) e^{K_m S B_1} \quad (7.52)$$

dalla quale

$$\varepsilon = \frac{1 - e^{K_m S B_1}}{C_{min} \left( \frac{1}{C_c} - \frac{1}{C_h} e^{K_m S B_1} \right)} \quad (7.53)$$

Posto  $C = C_{min}/C_{max}$  ed  $NTU = K_m S / C_{min}$

$$\varepsilon = \frac{1 - e^{-NTU(1-C)}}{1 - C e^{-NTU(1-C)}} \quad (7.54)$$

### 7.4.3 Relazioni inverse

Se viene assegnato un certo scambiatore di area definita, coefficiente di scambio termico noto e temperature dei fluidi note possiamo usare la relazione  $NTU \rightarrow \varepsilon$  per determinarne l'efficienza, la potenza totale scambiata e le temperature di uscita.

In sede di progettazione si hanno le temperature dei fluidi, le portate ed il coefficiente di scambio termico. La relazione  $NTU - \varepsilon$  può allora essere invertita. Cioè utilizzando l'efficienza dello scambiatore ed il rapporto di capacità come parametri di progetto possiamo determinare  $NTU$  dunque, noto il coefficiente globale di scambio, la superficie di scambio ecc... ecc...

#### 7.4.4 Scambiatori bifase in cui uno dei due fluidi vaporizza o condensa

Il valore del rapporto di capacità  $C$  varia tra 0 ed 1. Per dato scambiatore l'efficienza è massima per  $C = 0$  e minima per  $C = 1$ . Viene naturale chiedersi allora in quale condizione si realizza la condizione  $C = 0$  che massimizza l'efficienza  $\varepsilon$ . Dalla condizione

$$C = \frac{C_{min}}{C_{max}} \rightarrow 0 \quad (7.55)$$

deduciamo  $C_{min} \rightarrow 0$  (condizione non molto interessante dato che in questo caso uno dei due fluidi è fermo) oppure  $C_{max} \rightarrow \infty$ . La condizione  $C_{max} \rightarrow \infty$  in un diagramma  $Q - T$  significa scambio di calore a temperatura costante, cioè una condizione di *evaporazione* o *condensazione*. Si può dimostrare che in tale circostanza per ogni tipologia di scambiatore vale sempre

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_{max} = 1 - e^{-NTU}} \quad (7.56)$$

#### 7.4.5 Analisi e progetto dello scambiatore utilizzando $\varepsilon - NTU$

**Analisi** In sede di analisi di uno scambiatore di calore abbiamo le temperature di ingresso e le portate dei fluidi. Dunque possiamo subito calcolare il rapporto di capacità  $C = C_{min}/C_{max}$ . Inoltre sono noti anche il coefficiente globale di scambio termico medio  $K_m$  e la superficie  $S$ , dunque è noto  $NTU = K_m S / C_{min}$ . Nota la tipologia di scambiatore possiamo determinare l'efficienza  $\varepsilon$  entrando con  $C$  ed  $NTU$  nel grafico specifico. Infine, dalla definizione di  $\varepsilon$  determiniamo  $Q = \varepsilon C_{min} (T_{h,in} - T_{c,in})$ . Le temperature di uscita si calcolano facilmente nota  $Q$

$$T_{h,out} = T_{h,in} - \frac{Q}{C_h} \quad (7.57)$$

$$T_{c,out} = T_{c,in} + \frac{Q}{C_c} \quad (7.58)$$

**Progetto** Il progetto di uno scambiatore con il metodo dell'efficienza è molto utilizzato quando non si conoscono le temperature di uscita dei fluidi<sup>8</sup>. Note le portate abbiamo subito il rapporto di capacità. Dalla conoscenza della potenza totale da scambiare e delle temperature di ingresso determiniamo l'efficienza  $\varepsilon = Q / (C_{min} (T_{h,in} - T_{c,in}))$  che deve avere lo scambiatore. Scegliamo una tipologia di scambiatore tale che con quel  $\varepsilon$  e quel rapporto di capacità mi fa saltare fuori un  $NTU$  ragionevole. Poiché possiamo stimare il coefficiente di scambio termico medio dalla conoscenza di  $NTU$  determiniamo l'area di scambio, dunque le dimensioni dello scambiatore.

#### 7.4.6 Osservazioni

- Il significato fisico di  $NTU$  è

$$NTU = \frac{K_m S}{C_{min}} = \frac{\text{Capacità termica dello scambiatore [W/K]}}{\text{Capacità termica del fluido [W/K]}} \quad (7.59)$$

per fissato  $K_m / C_{min}$ ,  $NTU$  è una misura della dimensione fisica dello scambiatore.

<sup>8</sup>Se esse sono note il metodo della temperatura media logaritmica è più pratico.

- Dalla figura 7.6 notiamo come l'efficienza dello scambiatore controcorrente sia sempre maggiore del corrispondente equicorrente, a parità di  $NTU$  e rapporto di capacità.
- L'efficienza di uno scambiatore cresce inizialmente in modo rapido con  $NTU$ . Per valori maggiori di 3 tale crescita è trascurabile. In sede di progetto pertanto non è conveniente tentare di raggiungere grandi efficienze incrementando il valore di  $NTU$ , dato che, per dato scambiatore ciò si traduce in un incremento di area.

## 7.5 Generalità sulle superfici alettate

Superfici alettate di varia forma, dette dissipatori di calore, sono frequentemente utilizzate nel raffreddamento di componenti elettronici. L'energia dissipata da questi componenti è trasmessa ai dissipatori di calore per conduzione e dai dissipatori all'ambiente per convezione naturale o forzata. Un dissipatore di calore scelto appropriatamente può abbassare sensibilmente la temperatura di esercizio dei componenti aumentandone l'affidabilità. Una domanda che sorge subito nella scelta del dissipatore è se per una data area di base conviene scegliere alette molto fitte ( $S \uparrow$ ,  $h \downarrow$ ) o molto rade ( $S \downarrow$ ,  $h \uparrow$ ). Per una superficie alettata verticale, si può determinare una spaziatura ottimale che rende massimo il coefficiente di scambio termico dal dissipatore di calore per una assegnata area di base  $W \cdot L$ . Tale relazione è stata determinata da Rohsenow e Bar-Cohen:

$$S_{ott} = 2.714 \frac{L}{Ra^{1/4}} \quad (7.60)$$

Nel caso di spaziatura ottimale è stato provato che

$$h = 1.13 \frac{\lambda}{S_{ott}} \quad (7.61)$$

La potenza termica scambiata dalle alette in convezione naturale con la formula

$$\dot{Q} = h(2nLH)(T_s - T_a) \quad (7.62)$$

Per dissipatori più complicati valgono altre relazioni. In ogni caso l'idea di base è quella di aumentare la superficie di scambio convettivo senza generare delle sezioni di passaggio troppo anguste. Teoricamente possiamo ottenere dei risultati un'aletta piana sottile.

### 7.5.1 Teoria dell'aletta piana sottile

Consideriamo l'aletta piana illustrata in 7.8. Supponiamo che vi sia continuità materiale fra l'aletta e la parete cui è saldata. Ponendo l'origine dell'asse  $x$  sulla parete e facendo un bilancio di energia su uno strato di aletta di profondità unitaria e larghezza  $dx$  otteniamo

$$Q_x - Q_{x+dx} = 2hdx[T(x) - T_a] \quad (7.63)$$

dalla quale

$$-\frac{dQ}{dx} = 2h[T(x) - T_a] \quad (7.64)$$

Per la legge di Fourier risulta

$$Q = -ks \frac{dT}{dx} \quad (7.65)$$

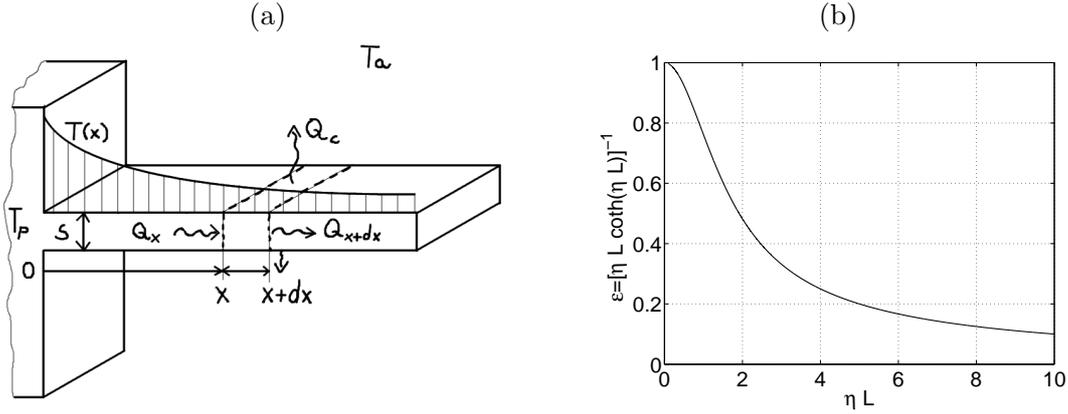


Figura 7.8: (a) Schema dell'aletta piana sottile; (b) efficienza in funzione del prodotto  $\eta L$ .

Si ottiene quindi la seguente equazione differenziale

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{2h}{ks}(T - T_a) , \quad (7.66)$$

che può essere agevolmente risolta introducendo la variabile  $\theta$

$$\theta = T - T_a , \quad (7.67)$$

da cui l'equazione (7.66) diventa

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \eta^2 \theta = 0, \quad \eta = \sqrt{\frac{2h}{ks}} , \quad [\eta] = \text{m}^{-1} \quad (7.68)$$

la cui soluzione è

$$\theta = Ae^{-\eta x} + Be^{\eta x} . \quad (7.69)$$

Si suppone che all'estremità  $x = L$  il flusso termico dissipato dall'aletta sia nullo:

$$\left( \frac{d\theta}{dx} \right)_{x=L} = 0 ; \quad (7.70)$$

sostituendo la soluzione (7.69) in (7.70) si ottiene

$$-\eta A e^{-\eta L} + \eta B e^{\eta L} = 0 . \quad (7.71)$$

Dal momento che c'è continuità materiale fra parete ed aletta si può supporre che la temperatura alla base dell'aletta ( $x = 0$ ) sia uguale alla temperatura di parete  $T_p$

$$A + B = \theta_p . \quad (7.72)$$

La soluzione delle (7.70) e (7.72) ci permette di trovare le costanti  $A$  e  $B$

$$A = \frac{\theta_p e^{-\eta L}}{e^{2\eta L} + 1} , \quad B = \frac{\theta_p}{e^{2\eta L} + 1} . \quad (7.73)$$

Quindi la distribuzione di temperatura lungo l'aletta è data da

$$\theta = \frac{\theta_p e^{-\eta x}}{e^{2\eta L} + 1} \left( e^{2\eta L} + e^{2\eta x} \right) . \quad (7.74)$$

Integrando l'equazione  $dQ = 2h\theta dx$  fra  $x = 0$  ed  $x = L$  si ottiene la potenza scambiata fra l'aletta e l'aria

$$Q = \frac{2h\theta_p}{\eta} \frac{1}{\coth(\eta L)} . \quad (7.75)$$

ove

$$\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (7.76)$$

L'efficienza dell'aletta è definita come il rapporto fra la potenza effettivamente scambiata (7.75) e la potenza che l'aletta scambierebbe se avesse temperatura uniforme e pari a  $T_p$ <sup>9</sup>, vale

$$\epsilon = \frac{1}{\eta L \coth(\eta L)} . \quad (7.77)$$

Il grafico dell'efficienza è illustrato in figura 7.8(b).

---

<sup>9</sup>Ovviamente questa potenza è  $Q = 2hL\theta_p$ .

## Capitolo 8

# Condizionamento dell'aria

### 8.1 Termodinamica delle miscele di aria ed acqua

Consideriamo la seguente esperienza. Con riferimento alla figura 8.1 prendiamo un barilotto trasparente, a tenuta e di volume noto in cui facciamo il vuoto mediante una pompa a vuoto. Supponiamo che tutto il sistema sia mantenuto costantemente alla temperatura ambiente  $T_{amb}$ . Quando raggiungiamo livelli di vuoto<sup>1</sup> accettabili (ad esempio  $p_i = 1$  mbar, pressione alla quale possiamo supporre trascurabile la presenza di aria), chiudiamo la valvola 1 ed apriamo piano piano la valvola 2. A causa della differenza di pressione l'acqua liquida sarà risucchiata all'interno del barilotto. La quantità di acqua che è entrata la leggiamo dal cilindro graduato la cui parte superiore è aperta. Quando è entrata la quantità che ci interessa chiudiamo la valvola 2 ed aspettiamo che il sistema raggiunga uno stato di equilibrio termodinamico. Nota la quantità di acqua che è entrata nel sistema possiamo subito calcolarci il volume specifico del fluido all'interno del sistema (barilotto + tratto di condotta fra la valvola 2 ed il barilotto). La pressione si incrementa un pochino a causa dell'ingresso di materia nel volume (costante) del barilotto. Per piccole quantità di acqua avremo volumi specifici  $v = V/M$  molto elevati, dunque probabilmente uno stato gassoso. Se eseguiamo uno studio della pressione del sistema in funzione della quantità di acqua immessa (mantenendo costante la temperatura) troviamo che se facciamo entrare una quantità di acqua superiore ad una quantità critica che indichiamo con  $M_s$ , la pressione si mantiene costante<sup>2</sup> e si nota la presenza di acqua liquida all'interno del barilotto. Se ripetiamo il medesimo esperimento per diversi valori di temperatura  $T$  determiniamo diversi valori di  $v_s(T)$ , e  $p_s(T)$  (vd. figura 8.2(b)). Date le basse pressioni che rileviamo dal grafico di figura 8.2(b) in corrispondenza di valori di temperatura compresi fra  $0^\circ\text{C}$  e  $50^\circ\text{C}$  viene naturale chiedersi: *il vapore d'acqua in condizioni di saturazione si comporta come un gas perfetto fra  $0^\circ\text{C}$  e  $50^\circ\text{C}$ ?*

Un test pratico che possiamo eseguire una volta che abbiamo misurato il volume specifico di saturazione e la pressione di saturazione in funzione di  $T$  (curva limite superiore)

---

<sup>1</sup>Per misurare con precisione la pressione in condizione di vuoto spinto possiamo utilizzare un manometro di Knudsen, oppure un manometro a ionizzazione.

<sup>2</sup>In pratica se manteniamo la temperatura costantemente pari a  $T$ , per ogni quantità di acqua che immettiamo abbiamo un certo volume specifico  $v = V/M$ . Attraverso questo metodo pertanto individuiamo il volume specifico di saturazione  $v_s(T)$  e la pressione di saturazione  $p_s(T)$  alla temperatura  $T$ .

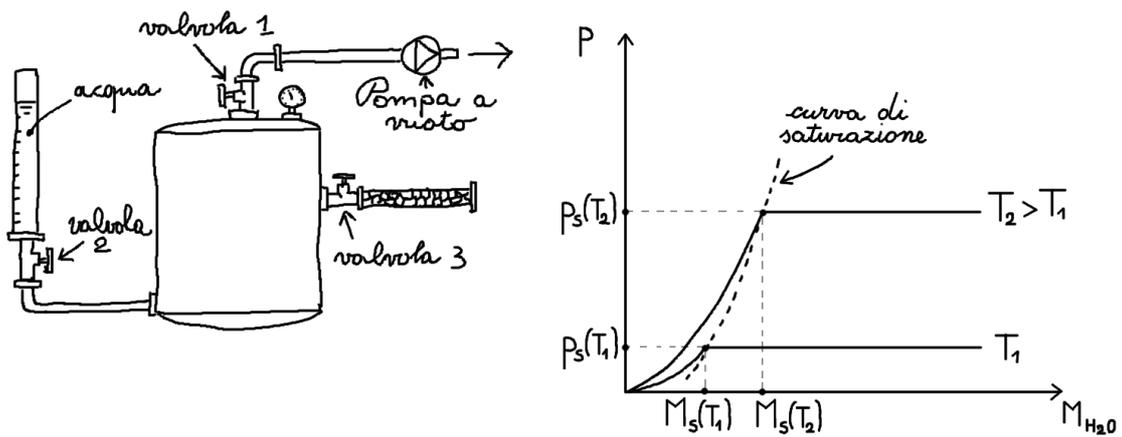


Figura 8.1: Esperimento per lo studio di una miscela di aria ed acqua.

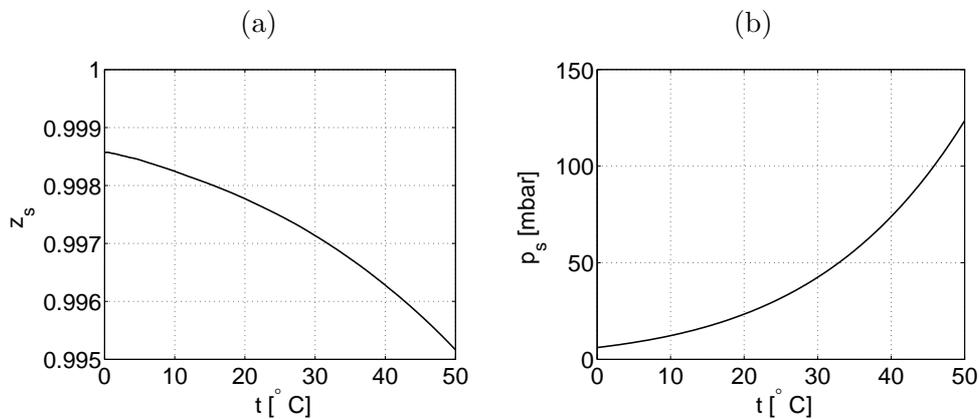


Figura 8.2: Fattore di compressibilità del vapore d'acqua saturo secco (a) e pressione di saturazione in funzione della temperatura (b).

consiste nel calcolo del fattore di *compressibilità*

$$z_s = \frac{p_s(T) v_s(T)}{T} \frac{m}{R_0} \quad R_0 = 8.314 \text{ J}/(\text{mol K}) \quad m = 18 \text{ g/mol} \quad (8.1)$$

Dalla figura 8.2(a) notiamo che trattare il vapore d'acqua saturo secco come un gas perfetto ci porta a commettere un errore minore dello 0.5% sul fattore di compressibilità. Tale errore è comunque un estremo superiore nel senso che in condizioni *non* saturazione se fissiamo la temperatura avremo una pressione  $p(T) < p_s(T)$  ed un volume specifico  $v(T) > v_s(T)$ . È possibile mostrare che lungo l'isoterma  $T$  il prodotto  $p(T)v(T)/T$  tende rapidamente a  $R_0/m$ , cioè  $z \rightarrow 1$ .

Apriamo ora molto lentamente la valvola 3 che permette l'introduzione di aria secca, la cui umidità è stata eliminata dal tubo attaccato alla valvola 3 contenente sostanze igroscopiche quali l'allumina attivata, o altre sostanze adsorbenti. A seguito dell'introduzione di una piccola quantità di aria notiamo che la pressione del sistema si incrementa di un pochino. Non abbiamo nessun tipo di reazione chimica fra aria ed acqua, e la diffusione dell'aria nell'eventuale fase liquida dell'acqua è trascurabile. In altre parole l'aria e l'ac-

	frazione volumetrica ( $\nu$ )	massa molare ( $m$ )	frazione ponderale ( $x$ )
$N_2$	78%	28.01 g/mol	0.754
$O_2$	21%	32.00 g/mol	0.232
$Ar$	1%	39.95 g/mol	0.014

Tabella 8.1: Composizione media dell'aria secca standard  $p_{atm} = 1.013$  bar,  $t = 20^\circ\text{C}$ .

qua possono essere considerati *non interagenti*. Questo significa che la miscela di gas ora contenuta nel barilotto può essere considerata come una miscela di gas perfetti la quale, come noto, si comporta ancora come un gas perfetto e segue la legge

$$pV = M_g R_g T = n_g R_0 T \quad (8.2)$$

in cui  $p$  è la pressione del gas  $V$  è il volume del barilotto,  $T$  è la temperatura del gas nel barilotto ( $n$  è il totale numero di moli).

Ricordiamo inoltre che la pressione parziale di un gas perfetto nella miscela è la pressione raggiunta da quel gas se esso occupasse da solo tutto il volume  $V$  alla temperatura  $T$ . Per l'aria ed il vapore d'acqua scriviamo pertanto la seguente espressione per le pressioni parziali

$$p_a = \frac{M_a R_a T}{V} = \frac{n_a R_0 T}{V} \quad (8.3)$$

$$p_v = \frac{M_v R_v T}{V} = \frac{n_v R_0 T}{V} \quad (8.4)$$

È facile provare la validità della *legge di Dalton*

$$p = p_a + p_v \quad (8.5)$$

in cui  $p_a$  e  $p_v$  sono appunto pressioni *parziali* di aria e vapore. In condizioni di saturazione la pressione parziale del vapore dipende solo dalla temperatura della miscela. Se non siamo in condizioni di saturazione allora la pressione parziale del vapore è minore di quella di saturazione alla stessa temperatura. Se immettiamo aria secca fino al raggiungimento della pressione atmosferica la situazione non cambia, cioè non cambia la quantità di acqua allo stato gassoso presente nella miscela di gas. In altre parole il processo di evaporazione dell'acqua è del tutto indipendente dalla presenza dell'aria (non vi è interazione fra i costituenti) e alla fine dei conti si trova una quantità di vapore avente una pressione parziale che coincide con quella di un gas perfetto. Se la pressione parziale è quella di saturazione a quella temperatura allora da qualche parte troveremo pure acqua liquida. In effetti possiamo ripetere l'esperimento illustrato in figura 8.1 aprendo prima la valvola 3 fino al raggiungimento della pressione atmosferica e poi la valvola 2. Troveremo che la quantità di acqua che rende satura la miscela è la stessa di quella che si ottiene nel caso precedente.

Pertanto una miscela di aria ed acqua alla pressione atmosferica può essere considerata come una sistema bi-componente in cui la fase gassosa è una miscela di gas perfetti mentre la fase liquida, quando presente, è in equilibrio termodinamico con il proprio vapore alla temperatura  $T$  (condizione di saturazione). La pressione che effettivamente agisce sull'acqua liquida è quella dell'aria umida, ed è somma delle pressioni parziali di aria e vapore d'acqua (normalmente intorno a 1.013 bar). La pressione parziale del vapore d'acqua corrisponde in questo caso è quella di saturazione dell'acqua alla temperatura della miscela.

### 8.1.1 Coordinate termodinamiche della miscela di aria-acqua: titolo e grado igrometrico

Per un sistema termodinamico con  $C$  componenti non reattivi il numero di *proprietà indipendenti* che individua gli stati di equilibrio stabile del sistema è sempre pari a  $C + 2$ . Il numero di proprietà intensive<sup>3</sup> fra loro indipendenti invece è individuato dalla regola delle fasi di Gibbs  $C + 2 - F$ . Lo stato può essere specificato utilizzando coordinate termodinamiche intensive o estensive, purché indipendenti ed in numero sufficiente. Uno stato di equilibrio stabile di una miscela di aria ed acqua ( $C = 2$ ) è determinato da quattro ( $C + 2 = 4$ ) proprietà indipendenti. Se consideriamo proprietà estensive possiamo specificare quantità di aria, quantità di acqua, energia e volume. Se si fa riferimento all'unità di massa di aria restano tre proprietà indipendenti. Se inoltre si fissa la pressione della miscela ad un valore costante (ad esempio la pressione atmosferica) restano due sole proprietà indipendenti. Si definisce *titolo* di una miscela di aria e acqua la quantità

$$x = \frac{M_w}{M_a} \quad (8.6)$$

ove  $M_w$  è la massa di acqua mentre  $M_a$  è la massa di aria secca. Notare che il titolo è definito anche per una miscela aria-acqua con acqua presente allo stato *liquido*. Conviene riferire tutte le grandezze estensive alla massa di aria secca dato che essa si mantiene costante nelle trasformazioni psicrometriche. Si definisce inoltre *grado igrometrico* della miscela il rapporto fra la densità del vapore presente nella miscela in forma gassosa e la densità che manderebbe in saturazione il vapore alla stessa temperatura

$$\varphi = \frac{\rho_v}{\rho_s(T)} \quad (8.7)$$

Alternativamente, considerando la miscela gassosa aria-vapore come una miscela di gas perfetti, possiamo esprimere il grado igrometrico come rapporto fra la pressione parziale del vapore, e la pressione parziale del vapore che manda in saturazione la miscela acqua-vapore alla temperatura della miscela

$$\varphi = \frac{p_v}{p_s(T)} \quad (8.8)$$

Ovviamente se la miscela contiene acqua allo stato liquido, la fase vapore presente è satura ad abbiamo  $\varphi = 1$ . Tale è il grado igrometrico in tutto il campo delle nebbie.

---

<sup>3</sup>Ricordiamo che una proprietà  $P$  si dice *estensiva* per il sistema  $A$  se il suo valore eguaglia la somma dei valori assunti da  $P$  per tutti i sottosistemi nei quali  $A$  può essere suddiviso (es: volume, quantità di materia, energia). Una proprietà  $P$  si dice *intensiva* se il suo valore per il sistema  $A$  eguaglia quello che  $P$  assume per ogni possibile sottosistema di  $A$  (es. pressione e temperatura per stati di equilibrio stabile). Una proprietà si dice *specificata* se è definita come rapporto fra due proprietà estensive.

### 8.1.2 Coordinate termodinamiche della miscela aria-vapore in assenza di liquido: titolo, grado igrometrico, grado di saturazione ed entalpia specifica

In *assenza di liquido* utilizzando le relazioni (8.3) e (8.4) possiamo riscrivere il titolo in funzione delle pressioni parziali di aria e vapore<sup>4</sup>

$$x = \frac{m_v n_v}{m_a n_a} \simeq \frac{18 p_v}{29 p_a} = 0.622 \frac{p_v}{p - p_v} \quad (8.10)$$

Inoltre dall'equazione di stato  $p_v = \rho_v R_v T$  abbiamo la seguente espressione per il grado igrometrico

$$\varphi = \frac{\rho_v}{\rho_s} = \frac{p_v}{p_s} \Rightarrow p_v = \varphi p_s \quad (8.11)$$

Sostituendo quest'ultima espressione in (8.10) otteniamo

$$\boxed{x(p, t, \varphi) = 0.622 \frac{\varphi p_s(t)}{p - \varphi p_s(t)}} \quad (8.12)$$

Alla pressione  $p$  ed alla temperatura  $t$  il titolo della miscela aria-vapore in condizioni di saturazione ( $\varphi = 1$ ) è

$$x_s(p, t) = 0.622 \frac{p_s(t)}{p - p_s(t)} \quad (8.13)$$

Ad esempio è possibile mostrare che  $x_s(1 \text{ bar}, 40^\circ\text{C}) = 48.8 \text{ g}_v/\text{kg}_a$ . Si definisce *grado di saturazione* il rapporto fra il titolo della miscela aria-vapore ed il titolo della miscela in condizioni di saturazione

$$\Psi = \frac{x}{x_s} \quad (8.14)$$

Applicando (8.12) e (8.13) troviamo

$$\Psi(T) = \varphi \frac{p - p_s(t)}{p - \varphi p_s(t)} \quad (8.15)$$

Se  $p_s \ll p$  abbiamo  $p - p_s(t) \simeq p - \varphi p_s(t)$ , cioè  $\Psi \simeq \varphi$ .

#### Entalpia specifica della miscela aria-vapore

Trattandosi di una miscela di due gas perfetti occorre stabilire un livello di entalpia comune per entrambi i costituenti rispetto al quale valutare le eventuali variazioni. Per l'acqua

<sup>4</sup>Infatti la massa di una mole di aria  $m_a$  si ottiene considerando la composizione standard dell'aria secca riportata in tabella 8.1

$$\begin{aligned} m_a &= m_{N_2} \nu_{N_2} + m_{O_2} \nu_{O_2} + m_{Ar} \nu_{Ar} \\ &= 28.01 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \cdot 0.78 + 32.00 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \cdot 0.21 + 39.95 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \cdot 0.01 \\ &= 28.97 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \end{aligned} \quad (8.9)$$

La massa di una mole d'acqua  $m_v = 18.02 \text{ g} / \text{mol}$  la leggiamo dalle tabelle del NIST. Per un conto approssimativo si può considerare la somma della massa molare dell'ossigeno  $16 \text{ g} / \text{mol}$  più due volte quella dell'idrogeno  $1 \text{ g} / \text{mol}$ . In tal modo non si tiene in considerazione il difetto di massa dovuto alle energie di legame, difetto comunque trascurabile per i calcoli che stiamo facendo.

lo stato di riferimento standard è il punto triplo  $t_T = 0.01^\circ\text{C}$ ,  $p_T = 6,11$  mbar in cui si pone uguale a 0 sia l'energia interna che l'entropia. L'entalpia dell'acqua nel punto triplo in condizioni di liquido saturo è  $h_T = u_T + p_T v_T = p_T v_T$ . Se espresso in kilojoule per kilogrammo  $h_T$  è un valore così piccolo che talvolta in tabella si pone uguale a zero. Per quanto riguarda l'aria, se esprimiamo le variazioni di temperatura in gradi Celsius è naturale porre l'entalpia nulla in 0. Poiché l'entalpia  $H$  è una proprietà estensiva ed i componenti della miscela non sono interagenti (non vi è entalpia di reazione) allora avremo<sup>5</sup>

$$h = c_{pat} + x(r_0 + c_{pv}t) \quad [\text{kJ/kg}_a] \quad x = \frac{M_v}{M_a} \quad (8.17)$$

in cui  $h_v = r_0 + c_{pv}t$  è l'entalpia specifica del vapore d'acqua alla temperatura  $t$ . Infatti  $r_0 \simeq 2500$  kJ/kg è il calore latente di vaporizzazione a  $0^\circ\text{C}$  mentre  $c_{pv}t$  è la variazione di entalpia del vapore d'acqua, considerato gas perfetto, rispetto al livello di riferimento  $0^\circ\text{C}$ . I dati sperimentali ci dicono che il calore specifico a pressione costante per il vapore d'acqua non dipende in modo apprezzabile dalla temperatura nell'intervallo  $0 \div 40^\circ\text{C}$ . Un valore medio per  $c_{pv}$  nel suddetto intervallo è  $c_{pv} = 1.9$  kJ/(kg K). Per l'aria, assumendo  $h_a(0^\circ\text{C}) = 0$  abbiamo  $h_a(t) = c_{pat} = 1 \cdot t$  kJ/kg<sub>a</sub>. Infatti il calore specifico a pressione costante dell'aria praticamente non varia nell'intervallo  $0 \div 40^\circ\text{C}$ . Pertanto otteniamo

$$\boxed{h(x, t) = t + x(2500 + 1.9t) \quad [\text{kJ/kg}_a]} \quad (8.18)$$

Per un gas perfetto (o una miscela di gas perfetti) qualunque sia la trasformazione  $dh/dt = c_p$ . Nel caso di una miscela di aria e vapore abbiamo, in particolare

$$c_p = \frac{dh}{dt} = c_{pa} + xc_{pv} \quad [\text{kJ}/(\text{kg}_a^\circ\text{C})] \quad (8.19)$$

che definisce il calore specifico a pressione costante dell'aria umida.

### 8.1.3 Diagramma di Mollier

In generale gli stati di equilibrio stabile di una miscela di aria ed acqua sono specificati da quattro proprietà indipendenti. Se riferiamo tutto all'unità di massa di aria tali proprietà diventano tre. Se consideriamo una pressione ben precisa, ad esempio  $p_{\text{atm}} = 1.013$  bar, allora gli stati di equilibrio stabile sono individuati da due proprietà indipendenti. Tali stati sono di norma rappresentati in un diagramma  $(h, x)$  ideato da Mollier, oppure in un diagramma psicrometrico. I diagrammi suddetti si riferiscono ad una pressione di miscela fissata<sup>6</sup>, ad esempio a  $p_{\text{atm}} = 1.013$  bar.

Il diagramma di Mollier è tracciato in coordinate oblique per facilitarne la lettura. Vediamo di capire da dove nasce questa necessità di utilizzare coordinate oblique.

<sup>5</sup>In generale se  $G$  è una proprietà estensiva della miscela allora

$$G = M_a g_a + M_v g_v \Rightarrow \frac{G}{M_a} = g_a + x g_v \quad (8.16)$$

se riferiamo tutto all'unità di massa di aria.

<sup>6</sup>Sono stati tracciati anche diagrammi di Mollier e psicrometrici corrispondenti a pressioni differenti, al fine di progettare impianti di condizionamento in quota.

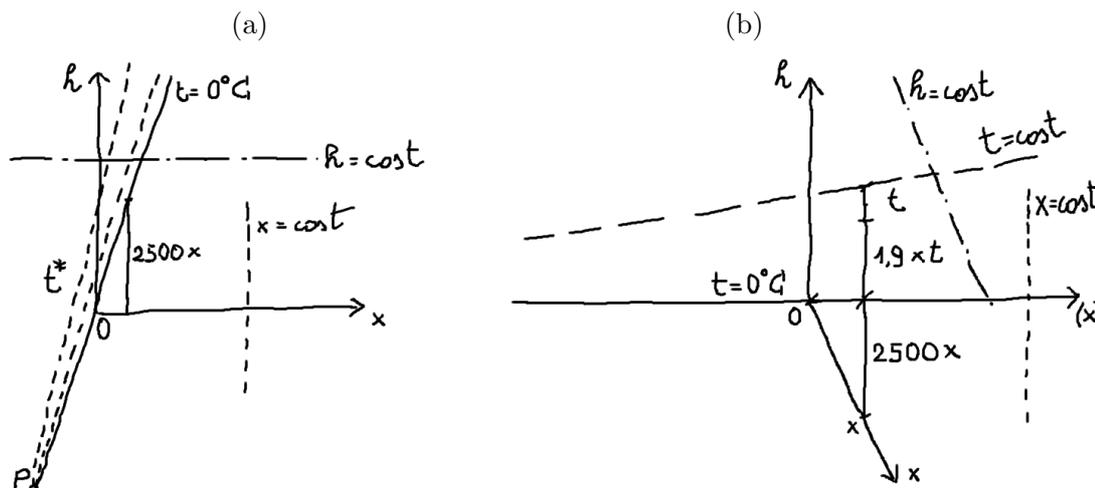


Figura 8.3: Diagramma di Mollier in coordinate non oblique (a) ed oblique (b).

**Curve isoterme** Consideriamo l'insieme delle curve isoterme nel diagramma  $(h, x)$ . Per identificarle è sufficiente fissare arbitrariamente un valore di temperatura  $t^*$  e considerare la relazione (8.18)

$$h(x, t^*) = 2500x + 1.9xt^* + t^* \quad (8.20)$$

Da essa deduciamo che le isoterme sono delle *rette* nel diagramma  $(h, x)$  con pendenza dipendente in modo molto debole dal particolare valore di  $t^*$ . Infatti

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{t=t^*} = 2500 + 1.9t^* \quad (8.21)$$

è possibile mostrare che curve isoterme si incontrano tutte in un punto  $P$  che sta sull'isoterma  $t = 0$  molto lontano dall'origine  $O$ . Nella figura 8.3 disegniamo le curve isoterme, le isoentalpiche e le isotitolo. Evidentemente la zona di interesse del diagramma, compresa fra le isoterme  $0^\circ\text{C}$  e  $40^\circ\text{C}$  è molto compressa e di non facile lettura. Pertanto conviene considerare una rotazione dell'asse  $x$  in modo tale da fare coincidere l'isoterma  $t = 0^\circ\text{C}$  con un nuovo asse orizzontale  $(x)$ . In figura 8.3(b) mostriamo questa costruzione. Giova rilevare che il nuovo asse orizzontale  $(x)$  contiene esattamente gli stessi valori di titolo contenuti nell'asse obliquo, cioè la scala dell'asse obliquo  $(x)$  viene compressa.

**Curve a grado igrometrico costante** Una volta tracciate le curve isoterme possiamo determinare le curve a grado igrometrico costante impiegando la relazione

$$x(t, \varphi) = 0.622 \frac{\varphi p_s(t)}{p_{atm} - \varphi p_s(t)} \quad (8.22)$$

Infatti fissato un valore di  $\varphi$  la precedente relazione stabilisce un legame fra  $x$  e  $t$ . Una volta tracciata la curva di *saturazione* che corrisponde a  $\varphi = 1$ , il prolungamento delle isoterme (8.20) a destra di tale curva deve essere cancellato poiché vale solo in assenza di acqua. Le isoterme nel campo delle nebbie risultano essere coincidenti con le isoentalpiche<sup>7</sup>. Con

<sup>7</sup>Ovviamente per ogni gas perfetto una isoterma coincide con una isoentalpica se la composizione del gas non varia (cosa che non avviene per  $\varphi < 1$ ). In condizioni di saturazione la composizione del gas è

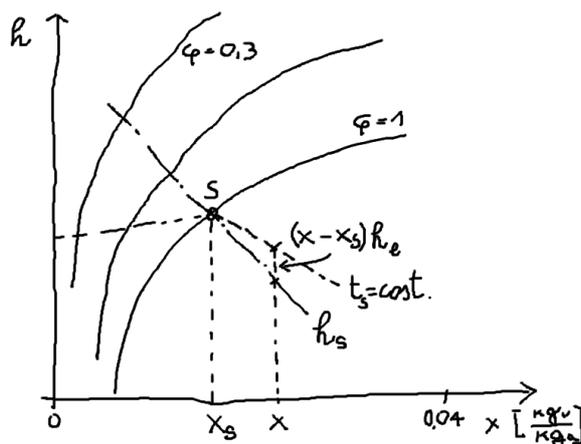


Figura 8.4: Curve isoterme ed isoentalpiche nel campo delle nebbie.

riferimento alla figura 8.4 notiamo che l'entalpia della miscela di aria e acqua è

$$h = h_s + (x - x_s) h_l \simeq h_s \quad (8.23)$$

in cui  $h_l$  è entalpia del liquido saturo alla temperatura  $t^8$ . Il termine  $(x - x_s) h_l$  è normamente trascurabile rispetto ad  $h_s$ .

#### 8.1.4 Trasformazioni di umidificazione e deumidificazione

##### Umidificazione

L'umidificazione dell'aria negli impianti civili si ottiene solitamente per via fisica secondo tre metodologie: *nebulizzazione*, *evaporazione* e *vaporizzazione*.

**Umidificazione per nebulizzazione** Il processo di nebulizzazione consiste nel ridurre l'acqua in microscopiche gocce (aerosol) che vengono investite dal flusso d'aria destinato all'ambiente. Il calore necessario all'evaporazione dell'aerosol viene fornito dal flusso d'aria, che corrispondentemente riduce la sua temperatura. Il processo nel suo complesso può essere considerato adiabatico. I nebulizzatori più comuni sono quelli ad *ugelli*, a *dischi* e ad *ultrasuoni*. Commentiamo brevemente quest'ultima tecnologia. Gli ultrasuoni vengono prodotti da elementi piezoelettrici immersi nell'acqua alimentati da tensione ad alta frequenza. La vibrazione indotta nell'elemento piezoelettrico produce onde di pressione ad alta frequenza in grado la rompere i legami Van der Waals caratteristici dello stato liquido<sup>9</sup>. Pertanto questa vaporizzazione indotta meccanicamente dalla vibrazione del cristallo piezoelettrico. Uno schema di impianto di umidificazione per nebulizzazione ad ugelli è

quella che corrisponde alle condizioni di saturazione e non varia più. Pertanto se aumentiamo il titolo si separa  $x - x_s$  liquido avente entalpia  $h_l$  costante per quella temperatura. Le isoterme nel *campo delle nebbie* coincidono con le isoentalpiche.

<sup>8</sup>Ricordiamo infatti che la definizione di titolo della miscela aria-acqua vale in generale e non è ristretto al caso di miscela aria-vapore senza liquido.

<sup>9</sup>Macroscopicamente osserviamo che le onde di depressione sono in grado di indurre una cavitazione. In altre parole se l'onda di depressione induce localmente una pressione minore della pressione di saturazione dell'acqua a quella temperatura viene prodotta una vaporizzazione locale. Tale vaporizzazione si estingue in un raggio ridotto a causa degli effetti di viscosità e ricombinazione delle onde di pressione.

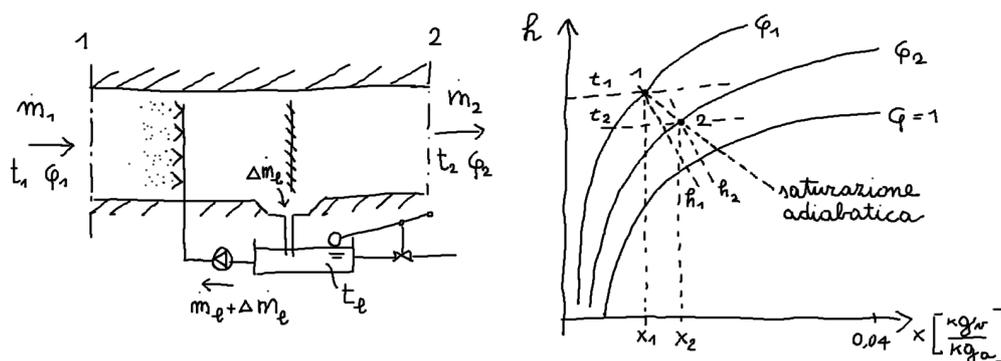


Figura 8.5: Schema di impianto di umidificazione per nebulizzazione ad ugelli e trasformazione termodinamica sul diagramma di Mollier.

indicato in figura 8.5(a). Scriviamo le equazioni di bilancio di massa e di energia fra le sezioni 1 e 2

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1 \quad (\text{portata di aria secca}) \quad (8.24)$$

$$\dot{m}_2 x_2 = \dot{m}_1 x_1 + \dot{m}_l \quad (\text{portata di acqua}) \quad (8.25)$$

$$\dot{m}_2 h_2 = \dot{m}_1 h_1 + \dot{m}_l h_l \quad (\text{bilancio di energia}) \quad (8.26)$$

ove l'entalpia  $h_l$  corrisponde allo stato di liquido sottoraffreddato alla temperatura  $t_l$  e pressione  $p_{atm}$ . Notare che una parte della portata d'acqua spruzzata dai nebulizzatori ( $\Delta \dot{m}_l$ ) viene recuperata dalla griglia posta sopra al serbatoio. Dalle precedenti relazioni otteniamo

$$\boxed{h_2 = h_1 + (x_2 - x_1) h_l} \quad (\text{curva di saturazione adiabatica}) \quad (8.27)$$

Il termine  $(x_2 - x_1) h_l$  è normalmente dell'ordine del centesimo di  $h_1$ <sup>10</sup>. Pertanto per il processo di umidificazione possiamo porre, in prima approssimazione

$$\boxed{h_2 \simeq h_1} \quad (8.28)$$

La relazione (8.27) viene comunque utilizzata nella pratica per la determinazione del grado igrometrico attraverso l'igrometro di Assmann. Le curve di saturazione adiabatica sono infatti riportate nel diagramma psicrometrico e vengono "etichettate" in funzione della temperatura di saturazione, detta *temperatura di bulbo umido*. Dall'intersezione di una curva di saturazione adiabatica con l'isoterma di bulbo secco è possibile determinare il grado igrometrico dell'aria umida. Per misurare il grado igrometrico possiamo anche usare un igrometro a condensazione. Il principio di funzionamento è semplice. Si raffredda un elemento a contatto con l'aria ambiente<sup>11</sup> fino a quando essa non raggiunge la rugiada

<sup>10</sup>Ricordiamo infatti che nel range 0–40 °C il titolo varia al più di 0.04 kg<sub>v</sub>/kg<sub>a</sub>. Inoltre l'entalpia specifica dell'acqua a pressione atmosferica e 40 °C è  $h_l \simeq 160$  kJ/kg. Pertanto male che vada  $(x_2 - x_1) h_l \simeq 1$  kJ/kg<sub>a</sub>. Per una miscela aria acqua satura  $h_1(37^\circ\text{C}) \simeq 140$  kJ/kg<sub>a</sub>.

<sup>11</sup>Tale elemento è di norma una vaschetta di metallo lucidato che contiene etere in cui viene fatta gorgogliare aria ambiente. Poiché l'etere è molto volatile l'evaporazione favorita dal gorgogliamento provoca un abbassamento della temperatura dell'etere stesso, dunque della vaschetta che lo contiene. Nell'etere è inserito un termometro. Appena osserviamo della condensa sulle pareti della vaschetta leggiamo la temperatura dell'etere, che corrisponde alla temperatura di saturazione dell'aria. In tal modo individuiamo la curva di bulbo umido.

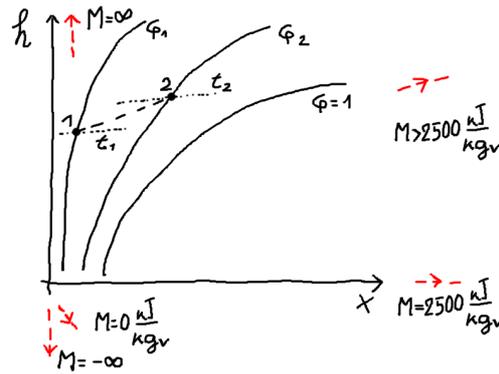


Figura 8.6: Umidificazione per vaporizzazione. Questo processo di umidificazione viene realizzato miscelando a pressione atmosferica l'aria ambiente con del vapore surriscaldato d'acqua proveniente da un vaporizzatore (solitamente elettrico). L'umidificazione per vaporizzazione è approssimativamente isoterma.

sull'elemento stesso, appannandolo. In tal caso si legge immediatamente la temperatura sull'elemento. Tale temperatura coincide con quella di saturazione. Seguendo la curva di saturazione adiabatica che passa per tale punto ed intersecandola con quella di bulbo secco si risale al grado igrometrico.

**Umidificazione per evaporazione** L'aria ambiente, dopo essere stata filtrata adeguatamente viene indirizzata tramite un ventilatore attraverso una estesa superficie di materiale sintetico (facilmente ripulibile) imbevuto di acqua. Anche in questo caso il processo di umidificazione è adiabatico ed avviene a spese del calore sensibile dell'aria.

**Umidificazione per vaporizzazione** Il processo di evaporazione consiste nel riscaldare (mediante riscaldatori elettrici) l'acqua contenuta in un serbatoio fino al punto di ebollizione. Il vapore nascente viene miscelato con la corrente di aria da inviare all'ambiente. In questo caso abbiamo la miscelazione di una corrente di aria umida con del vapore surriscaldato alla pressione atmosferica (intorno a  $105 \div 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ; ricordiamo che a  $100 \text{ }^\circ\text{C}$  abbiamo una entalpia di vapore saturo secco  $h_v \simeq 2675.6 \text{ kJ/kg}$ ). In caso di miscelazione adiabatica abbiamo le equazioni

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1 \quad (8.29)$$

$$\dot{m}_2 x_2 = \dot{m}_1 x_1 + \dot{m}_v \quad (8.30)$$

$$\dot{m}_2 h_2 = \dot{m}_1 h_1 + \dot{m}_v h_v \quad (8.31)$$

dalle quali segue

$$M = \frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1} = h_v \simeq 2675.6 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}_v} \quad (8.32)$$

In questo caso però l'entalpia del vapore è del tutto paragonabile a quella della miscela (se non superiore). La pendenza della retta di lavoro nel diagramma di Mollier pertanto è leggermente superiore alla retta  $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$  (che ricordiamo corrisponde a  $2500 \text{ kJ/kg}_v$ ). Ciò è ragionevole se si pensa che a seguito dell'immissione di vapore surriscaldato l'aria non solo si umidifica ma si riscalda pure. Il processo è illustrato in figura 8.6.

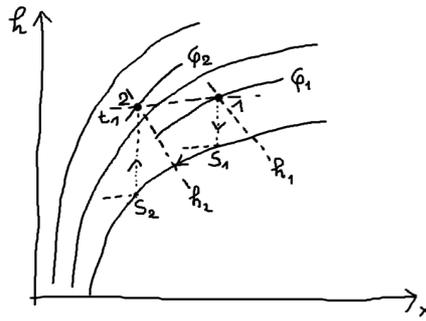


Figura 8.7: Deumidificazione per raffreddamento in cui supponiamo di riportare l'aria alla temperatura  $t_1$ , a fine processo.

### Deumidificazione

Questo processo consiste nell'eliminare l'umidità eccedente nel flusso d'aria di interesse al fine di mantenere l'ambiente condizionato nelle condizioni igrometriche desiderate<sup>12</sup>. La deumidificazione può avvenire per *refrigerazione* o con *sistemi chimici* (sostanze igroscopiche adsorbenti).

**Deumidificazione per raffreddamento** È il metodo più diffuso. Esso consiste in un raffreddamento l'aria umida fino alla temperatura di rugiada e successiva sottrazione di calore accompagnata dalla separazione di liquido saturo. Le unità di trattamento dell'aria (UTA) sono dotate di una batteria di scambiatori di calore alettati percorsi da fluido frigorifero o acqua refrigerata, che provvedono contemporaneamente sia alla deumidificazione che al raffreddamento della corrente d'aria. Per ottenere l'eliminazione di una quantità fissata di umidità è necessario raffreddare la miscela aria-vapore fino alla temperatura di rugiada (temperatura di saturazione). Una ulteriore sottrazione di calore porta alla formazione di acqua liquida che viene sottratta dalla corrente d'aria. Successivamente viene eseguito un riscaldamento della miscela al fine di realizzare le condizioni termo-igrometriche desiderate. Per motivi di risparmio energetico vengono talvolta impiegati scambiatori di calore rigenerativi tipo Ljumstrong che utilizzando parte del calore dell'aria in ingresso per risurriscaldare quella deumidificata alla fine del processo di raffreddamento. Negli impianti centralizzati a fan-coil l'umidità in eccesso viene raccolta in una bacinella di scarico o direttamente scaricata all'esterno dell'ambiente. I deumidificatori portatili non sono altro che dei piccoli frigoriferi in cui vi è una unità di trattamento aria con un raffreddatore (evaporatore) seguito da un riscaldatore (condensatore) fra i quali viene inserito un sistema di raccolta della condensa.

**Deumidificazione chimica** Si basa sull'impiego di diverse tipologie di sostanze essiccanti, quali adsorbenti solidi ad alta porosità (silicagel, allumina attivata) o adsorbenti liquidi (cloruro di litio, acqua-glicole etilenico). Le sostanze adsorbenti una volta sature d'acqua possono essere rigenerate mediante flusso di aria calda da scaricare all'esterno.

<sup>12</sup>Indicativamente per un impianto di condizionamento estivo in cui vi sono persone in attività modesta, le condizioni di benessere sono  $24 \div 25$  °C con umidità relativa (grado igrometrico) del 45 ÷ 55%.

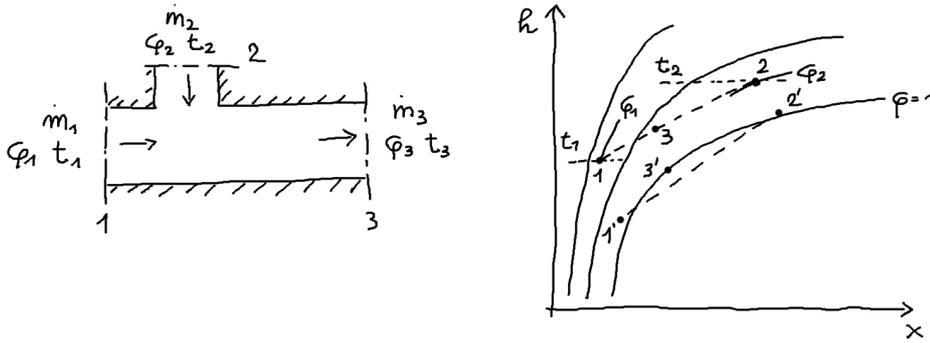


Figura 8.8: Miscelazione adiabatica di due correnti di aria umida.

La rigenerazione avviene spesso impiegando degli scambiatori di calore rotativi a nido d'ape in cui l'adsorbente solido è depositato direttamente sullo scambiatore. La rigenerazione avviene investendo una semi-metà di scambiatore con flusso di aria calda in grado di prelevare l'umidità dalle sostanze igroscopiche sature. La deumidificazione chimica è approssimativamente isoterma.

### 8.1.5 Miscelazione adiabatica di due correnti di aria umida

Con riferimento allo schema illustrato in figura 8.8, consideriamo il processo adiabatico di miscelazione di due correnti di aria umida. Supponiamo noto lo stato nelle sezioni di ingresso 1 e 2. In un diagramma  $(h, x)$  lo stato della miscela nella sezione 3 si ottiene da considerando le equazioni

$$\dot{m}_3 = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 \quad (8.33)$$

$$\dot{m}_3 x_3 = \dot{m}_1 x_1 + \dot{m}_2 x_2 \quad (8.34)$$

$$\dot{m}_3 h_3 = \dot{m}_1 h_1 + \dot{m}_2 h_2 \quad (8.35)$$

che, se risolte, permettono di scrivere

$$x_3 = \frac{\dot{m}_1 x_1 + \dot{m}_2 x_2}{\dot{m}_1 + \dot{m}_2} \quad (8.36)$$

$$h_3 = \frac{\dot{m}_1 h_1 + \dot{m}_2 h_2}{\dot{m}_1 + \dot{m}_2} \quad (8.37)$$

Cioè il punto 3 si trova da qualche parte sulla retta che congiunge 1 e 2. Questo è vero soltanto se la retta che passa per gli stati 1 e 2 non taglia la curva di saturazione. Questa circostanza non è remota, avviene tutte le volte che si forma della nebbia dall'incontro due portate l'aria umida una fredda ed una calda, entrambi prossime alla saturazione. In quest'ultimo caso si ha uno stato finale che sta da qualche parte sulla curva di saturazione. Per determinarlo occorre considerare la formazione di uno stato liquido, cioè occorre considerare le equazioni

$$\dot{m}_3 = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 \quad (8.38)$$

$$\dot{m}_3 x_3 = \dot{m}_1 x_1 + \dot{m}_2 x_2 + \dot{m}_l \quad (8.39)$$

$$\dot{m}_3 h_3 = \dot{m}_1 h_1 + \dot{m}_2 h_2 + \dot{m}_l h_l \quad (8.40)$$

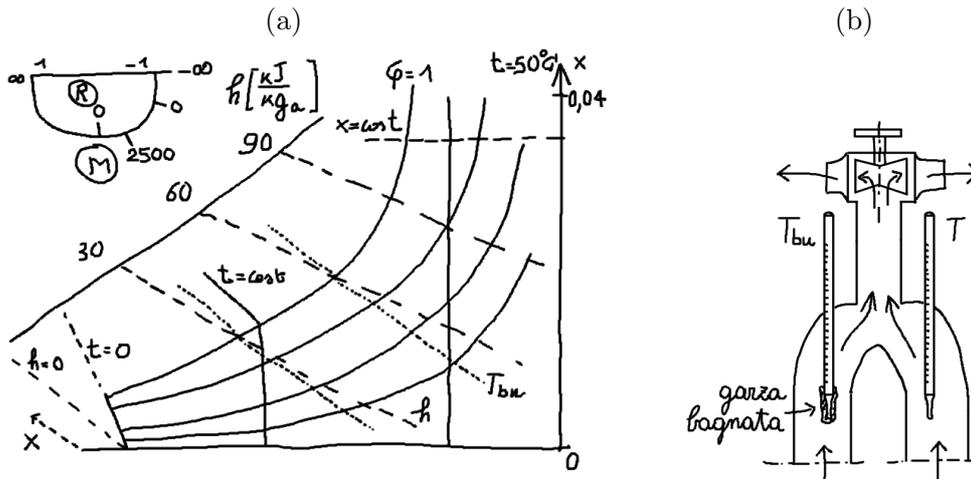


Figura 8.9: (a) Schema di diagramma psicrometrico. (b) Psicrometro di Assmann per la misura del grado igrometrico di una miscela di aria ed acqua.

in cui l'entalpia del liquido saturo è da valutarsi alla temperatura della miscela in uscita. In pratica, eliminando  $\dot{m}_l$  nelle ultime due equazioni si perviene alla soluzione del problema ricercando un valore di  $t_3$  a cui corrisponde un  $x_3$ <sup>13</sup> sulla curva di saturazione tale che l'equazione

$$\dot{m}_3 h_3(t_3) = \dot{m}_1 h_1 + \dot{m}_2 h_2 + h_l(t_3) (\dot{m}_3 x_3 - \dot{m}_1 x_1 - \dot{m}_2 x_2) \quad (8.42)$$

sia soddisfatta.

### 8.1.6 Diagramma di psicrometrico

Per la progettazione degli impianti di condizionamento dell'aria si preferisce talvolta utilizzare il diagramma psicrometrico al posto di quello di Mollier. La tipologia di informazioni che possono essere determinate da questi due diagrammi è esattamente la medesima. Vediamo come è fatto il diagramma psicrometrico. L'isoterma corrispondente a  $t = 50^\circ\text{C}$  è posta verticalmente sul lato destro del diagramma mentre le altre sono leggermente inclinate verso sinistra. Il diagramma di comune impiego si riferisce solitamente alla pressione di 1.013 bar, anche se sono disponibili anche diagrammi a pressione differenti<sup>14</sup>. Ai bordi del diagramma sono indicate le direzioni delle rette aventi coefficiente angolare

$$M = \frac{\Delta h}{\Delta x} \quad (8.43)$$

ed

$$R = \frac{Q_s}{Q_{tot}} \quad (8.44)$$

<sup>13</sup>Il titolo in condizioni di saturazione è, ovviamente

$$x_3 = 0.622 \frac{p_s(t_3)}{p_{atm} - p_s(t_3)} \quad (8.41)$$

<sup>14</sup>Ad esempio a 2000 metri di quota il trattamento dell'aria umida è leggermente diverso a causa del differente valore della pressione atmosferica.

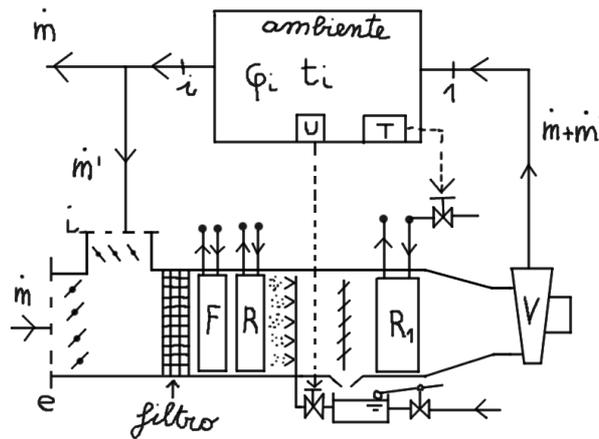


Figura 8.10: Unità di trattamento aria (UTA). Nello schema notiamo: due riscaldatori  $R$  ed  $R_1$ ; un evaporatore di un frigorifero  $F$ ; una sezione di umidificazione ad ugelli; un ventilatore  $V$ ; un termostato  $T$  ed un umidostato  $U$  che controllano la temperatura e l'umidità dell'ambiente condizionato.

ove  $Q_s = \dot{m}c_p(t_2 - t_1)$  è il calore *sensibile* ( $c_p$  è il calore specifico di miscela (8.19)), mentre  $Q_{tot} = Q_s + Q_l$  è il calore totale, somma di quello sensibile e di quello *latente*  $Q_l$ . Notiamo che  $R = 0$  è una retta circa parallela alle isoterme.

Il calore sensibile caratterizza le sorgenti “secche” di calore: dispersioni termiche attraverso le pareti, dissipazioni di motori elettrici e lampadine, scambio termico attraverso gli abiti di chi li veste, ecc... Il calore latente invece caratterizza le sorgenti “umide” di calore: processi di respirazione e sudorazione delle persone all'interno dell'ambiente condizionato, presenza di eventuali prodotti alimentari umidi, ecc.. Le sorgenti umide infatti sono in grado di modificare la temperatura del sistema inducendo processi di saturazione adiabatica ad entalpia approssimativamente costante.

Ci si potrebbe chiedere: perché il diagramma psicrometrico presenta entrambi le pendenze  $R$  e  $M$ ? Il motivo è semplice: talvolta è facile calcolarsi la portata di umidità prodotta all'interno dell'ambiente, talvolta no. Ad esempio nel caso in cui si consideri una certa attività lavorativa umana è più facile misurare il calore latente di quanto non sia misurare la portata di vapore prodotto.

## 8.2 Impianti di condizionamento

Gli impianti di condizionamento hanno come obiettivo la realizzazione di condizioni termoisometriche controllate in un certo ambiente. Essi vengono utilizzati diffusamente in applicazioni civili (per realizzare condizioni di benessere delle persone) e nell'industria di processo per alcune fasi di stand-by di prodotti (ad esempio impianti di essiccazione a tunnel o a letto fluido).

### 8.2.1 Unità di trattamento aria (U.T.A)

L'elemento fondamentale di un impianto di condizionamento è l'unità di trattamento aria (UTA) schematizzata in figura 8.10. Ovviamente si tratta di uno schema semplificato dato che il layout impiantistico di una unità di trattamento aria dipende dalla applicazione

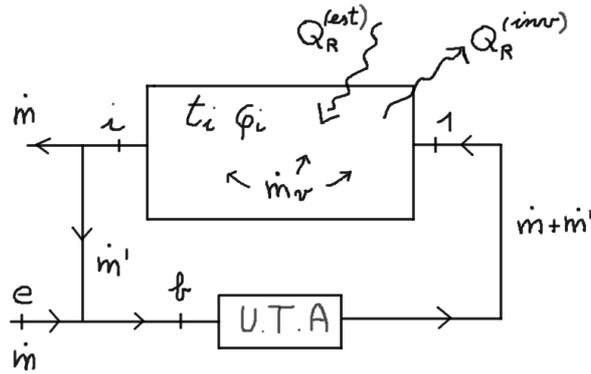


Figura 8.11: Schema di impianto di condizionamento con ricircolo d'aria. Nel caso di condizionamento estivo abbiamo una potenza termica entrante  $Q_R^{(est)}$ , mentre nel caso di condizionamento invernale abbiamo una potenza termica uscente  $Q_R^{(inv)}$

specificata a cui è destinata. L'aria che entra dalla sezione "e" viene eventualmente miscelata adiabaticamente con quella in uscita dall'ambiente condizionato. Se si tratta di un ambiente in cui vi sono persone, la normativa prevede un numero minimo di ricambi d'aria orari che dipendono dal tipo di attività svolta. La portata d'aria miscelata  $\dot{m} + \dot{m}'$  subisce una serie di trasformazioni che la portano in uno stato termodinamico corrispondente al punto 1 in uscita da ventilatore. L'aria in ingresso nell'ambiente da condizionare deve avere umidità ed energia tali da mantenere le condizioni termoigrometriche di progetto. L'aria in uscita, in uno stato corrispondente alle condizioni interne dell'ambiente può essere ricircolata nell'impianto di condizionamento al fine di risparmiare parte della potenza (principalmente frigorifera e termica) necessaria al condizionamento.

### 8.2.2 Condizionamento estivo

Consideriamo un problema di progetto di un impianto di condizionamento per fare del freddo in estate. Lo schema è quello di figura 8.11. I dati di progetto sono:

1. le condizioni di temperatura ed umidità dell'aria esterna. In fase di progetto solitamente si sceglie la media dei massimi stagionali di temperatura per la determinazione del carico termico. Questo per non sottodimensionare l'impianto.
2. Le condizioni termoigrometriche che vogliamo realizzare nell'ambiente da condizionare. Nel caso di condizionamento di un ambiente in cui vi sono persone che svolgono una certa attività si farà riferimento alle condizioni del benessere termoigrometrico (vd. §8.3).
3. Il carico termico dell'impianto. Questo è un parametro fondamentale di progetto il cui calcolo è abbastanza delicato. Infatti esso tiene conto sia delle entrate termiche attraverso la struttura che delimita l'ambiente sia della produzione di calore e di umidità dovute alle varie attività svolte all'interno. Il calcolo del carico termico si conclude con l'individuazione di una potenza netta  $Q_R^{(est)}$  e di una portata di vapore prodotta  $\dot{m}_v$  da portare fuori dall'ambiente al fine di mantenere le condizioni

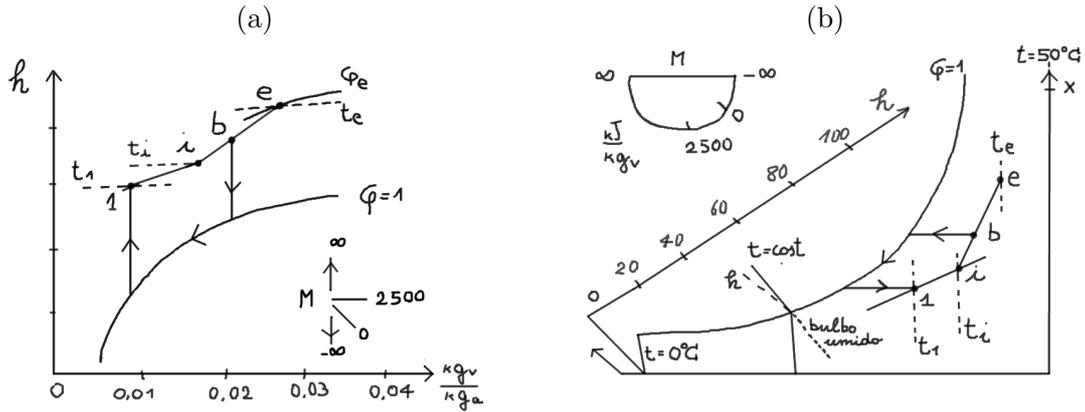


Figura 8.12: Condizionamento estivo: trasformazioni dell'aria nel diagramma di Mollier (a) ed in quello psicrometrico (b). I due grafici non si riferiscono allo stesso impianto dato che le pendenze delle rette di lavoro sono differenti.

di progetto. Equivalentemente possiamo avere un carico termico espresso in termini di *calore sensibile* e *calore latente*. Talvolta infatti la stima di portata di vapore prodotta all'interno è difficoltosa (ad esempio nel caso in cui si tratti di respiro e sudorazione umana); in questi casi si preferisce utilizzare il calore latente che è una quantità di più facile determinazione.

Le equazioni che descrivono la dinamica del sistema sono

$$(\dot{m} + \dot{m}') (x_i - x_1) = \dot{m}_v \quad (8.45)$$

$$(\dot{m} + \dot{m}') (h_i - h_1) = Q_R^{(est)} \quad (8.46)$$

$$\dot{m}' h_i + \dot{m} h_e = (\dot{m} + \dot{m}') h_b \quad (8.47)$$

$$\dot{m}' x_i + \dot{m} x_e = (\dot{m} + \dot{m}') x_b \quad (8.48)$$

Anzitutto, noto da progetto il carico termico  $Q_R^{(est)}$  e nota la portata di vapore prodotto  $\dot{m}_v$  si determina la retta di lavoro

$$M = \frac{Q_R^{(est)}}{\dot{m}_v} = \frac{h_i - h_1}{x_i - x_1} > 0 \quad (8.49)$$

su cui stanno il punto 1 ed il punto  $i$ . Tale retta ha una pendenza positiva, normalmente superiore superiore a  $2500 \text{ kJ/kg}_v$ <sup>15</sup>. In figura 8.12 sono illustrate le trasformazioni realizzate dall'unità di trattamento aria nel diagramma di Mollier ed in quello psicrometrico. Gli stati  $i$  ed  $e$  sono noti da progetto. Lo stato  $b$  sta da qualche parte sulla congiungente  $i - e$ , dipendentemente dall'entità del ricircolo d'aria. La retta di lavoro è nota. La sequenza di trasformazioni compiute dall'unità di trattamento aria è

<sup>15</sup>Tale differenza di entalpia rappresenta il calore latente di vaporizzazione dell'acqua a  $0^\circ\text{C}$ . Dal diagramma di Mollier notiamo che un processo che avviene secondo  $M = 0$  è approssimativamente *isotermo*. Pertanto se dai calcoli si ottiene che  $M = 2500 \text{ kJ/kg}_v$  allora abbiamo che il calore entrante nella struttura è tale bilanciare la diminuzione di temperatura dovuta all'umidificazione interna. Teoricamente può anche accadere che il calore  $Q_R$  sia tale da non riuscire a bilanciare il raffreddamento dovuto all'umidificazione. In questo caso l'aria in ingresso è addirittura a temperatura superiore a quella interna!

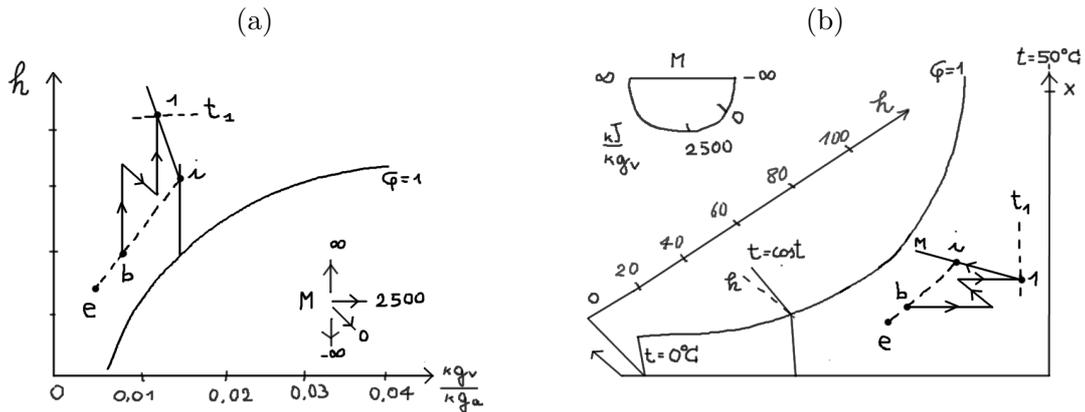


Figura 8.13: Condizionamento invernale: trasformazioni dell'aria nel diagramma di Mollier (a) ed in quello psicrometrico (b).

1. un raffreddamento a titolo costante fino alla temperatura di rugiada che corrisponde a  $x_b$ ;
2. una deumidificazione per raffreddamento fino al titolo  $x_1$ ;
3. un riscaldamento a titolo costante fino alla temperatura  $t_1$ .

Lo stato 1 deve stare sulla retta di lavoro a sinistra dello stato  $i$  ad una temperatura scelta dal progettista compatibilmente con le specifiche d'impiego dell'impianto. Infatti se si tratta di un impianto di condizionamento  $t_1$  è la temperatura dell'aria che esce dalle prese di ventilazione. Chiaramente tale temperatura non può essere troppo vicina a  $t_i$  altrimenti la ventilazione assume le specifiche di un tornado. Non può neanche essere troppo sotto  $t_i$  altrimenti ci sono dei rischi concreti che un vecchietto che passa accidentalmente davanti alla presa di ventilazione ci resti per sempre.

### 8.2.3 Condizionamento invernale

Sempre con riferimento alla figura 8.11 in questo caso il carico termico è costituito da una potenza termica netta uscente dalla struttura  $Q_R^{(inv)}$  e da una produzione di vapore interna. Le equazioni (8.45), (8.47) e (8.48) sono sempre valide mentre la (8.46) ora si scrive come

$$(\dot{m} + \dot{m}') (h_1 - h_i) = Q_R^{(inv)} \quad (8.50)$$

In questo caso la retta di lavoro è

$$M = -\frac{h_i - h_1}{x_i - x_1} < 0 \quad (8.51)$$

con il punto 1 sempre a sinistra di  $i$ . La sequenza di trasformazioni compiute dall'unità di trattamento aria è (vd. figura 8.2.3)

1. un riscaldamento a titolo costante fino ad una temperatura superiore a quella di bulbo umido corrispondente ad raffreddamento a titolo costante di  $i$ ;
2. una umidificazione fino al raggiungimento del titolo  $x_1$ ;

3. un riscaldamento a titolo costante fino alla temperatura  $t_1$ .

Ancora una volta notiamo che lo stato 1 viene scelto dal progettista. Valgono le stesse considerazioni fatte nel caso del condizionamento estivo, cioè  $t_1$  non può essere troppo vicina a  $t_i$  e neanche troppo lontana. In quest'ultimo caso in prossimità delle prese di ventilazione potrebbe esserci una piccola portata d'aria a temperatura troppo elevata.

#### 8.2.4 Calcolo del carico termico

Il carico termico dell'ambiente da condizionare è uno dei parametri di progetto più importanti per il dimensionamento dell'impianto. Il carico termico può essere valutato per via teorica impiegando delle formule più o meno rigorose che fanno uso dei coefficienti di conduzione, convezione ed irraggiamento. Note le temperature interne ed esterne dell'ambiente da condizionare (per le esterne si prendono le minime o le massime stagionali nel caso di climatizzazione edilizia), i materiali di costruzione, la geometria dell'ambiente e la sua posizione sulla terra (per valutare gli effetti dell'irraggiamento termico sia sulle pareti esterne sia attraverso i vetri), il contributo della potenza dispersa all'interno dell'ambiente da macchinari e persone, i ricambi d'aria, ecc..., ecc..., ecc... è possibile farsi una idea di quale temperatura, quale portata e quale umidità deve avere l'aria che entra dalle prese di ventilazione. Alternativamente al progettista sono fornite delle tabelle che permettono di eseguire lo stesso tipo di calcolo in modo relativamente più veloce. Ad esempio sono forniti dei dati per il calore sensibile attraverso il tetto, oppure il calore sensibile ed il calore latente introdotto dalle persone che entrano ed escono dall'ambiente e da quelle che ci lavorano. Solitamente il carico termico totale può essere suddiviso in

1. calore entrante o uscente attraverso le strutture;
2. carichi termici interni (macchine, persone, processi, ecc...)

Il calcolo del carico termico dell'ambiente si conclude con l'individuazione del calore sensibile e del calore latente, dunque con l'individuazione della retta di lavoro

$$R = \frac{Q_s}{Q_s + Q_l} \quad (8.52)$$

**La certificazione energetica** Le modalità di calcolo del carico termico e la classificazione del risultato del calcolo in funzione della tipologia dell'edificio e della sua localizzazione geografica sono l'oggetto di una normativa sulla certificazione energetica che è in fase di definizione. In particolare il parametro fondamentale che individua la classe dell'edificio è il carico termico specifico (valutato per unità di superficie dell'ambiente di cui si esegue la certificazione). Vi sono programmi automatici che implementano le direttive della normativa e permettono di eseguire un calcolo del carico termico specifico in modo rapido importando direttamente la planimetria dell'edificio in formato elettronico (ad esempio disegni CAD).

### 8.3 Benessere termoigrometrico

Il condizionamento dell'aria per ambienti in cui vi sono attività antropiche è una questione delicata. Il corpo umano è un sistema termodinamico molto complesso e la sua interazione

con l'ambiente dipende da una molteplicità di parametri. La condizione di comfort termico o benessere termico è uno stato psicofisico in cui il soggetto esprime soddisfazione nei riguardi del microclima che lo circonda. Chiaramente tale giudizio è condizionato dal tipo di attività che il soggetto sta svolgendo, dal vestiario, dal suo metabolismo, ecc... La definizione di un indice capace di valutare lo scostamento da una condizione di benessere è stato oggetto di numerose indagini di tipo statistico. Azitutto sono state definite delle unità di misura particolari per quantificare la potenza convertita dal metabolismo umano e la resistenza termica degli abiti.

**Energia metabolica (met)** Il calore prodotto da processi metabolici umani dipende dall'attività svolta dall'individuo e può calcolarsi anche in base al consumo di ossigeno. La potenza prodotta dall'essere umano viene solitamente tabulata in base alla tipologia di impiego e/o attività ed è espressa in  $\text{W}/\text{m}^2$ . Spesso si utilizza una unità di misura particolare, il "met" (*metabolic*) che rappresenta la potenza specifica trasformata mediamente da un individuo seduto ed inattivo

$$1 \text{ met} := 52.8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (8.53)$$

**Resistenza termica degli abiti (clo)** Il trasporto di calore attraverso gli abiti è un fenomeno molto complicato che dipende da fenomeni conduttivi, convettivi e di irraggiamento. È stata introdotta una unità il "clo" (*clothes*) per caratterizzare la resistenza termica specifica degli abiti

$$1 \text{ clo} = 0.155 \frac{\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}}{\text{W}} \quad (8.54)$$

Un corpo nudo equivale a 0 clo. Un abito da lavoro (camicia, pantaloni lunghi, cravatta e giacca) equivale ad 1 clo.

### 8.3.1 Metodo della temperatura efficace standard (ASHRAE)

Questo metodo è stato proposto dalla ASHRAE ed utilizza un parametro  $w$  che rappresenta la frazione di superficie corporea coperta da sudore se il soggetto (in attività sedentaria  $\Rightarrow 1 \text{ met}$ ) vestito con abiti leggeri è posto in un ambiente con aria poco mossa ed avente condizioni termoigrometriche controllate. Chiaramente  $w = 0$  rappresenta una condizione di benessere. In un diagramma psicrometrico, per ogni condizione di temperatura ed umidità possono essere tracciate le curve ad  $w$  costante. La temperatura efficace standard (TES) è definita come la temperatura che si ottiene dall'intersezione di tali curve con la curva  $\varphi = 50\%$ . Tale temperatura efficace rappresenta in qualche modo la temperatura "percepita" da un individuo in un certo ambiente. La curva  $w \simeq 0$  interseca  $\varphi = 50\%$  intorno a  $25^\circ\text{C}$ , mentre  $w \simeq 1$  interseca  $\varphi = 50\%$  intorno a  $41^\circ\text{C}$ . Come facciamo ad estendere la procedura sopra a  $41^\circ\text{C}$  e sotto  $25^\circ\text{C}$  dato che non possiamo avere  $w < 0$  e  $w > 1$ ? L'ASHARE prescrive di tracciare delle rette parallele a  $w = 0$  a sotto  $25^\circ\text{C}$  e parallele a  $w \simeq 1$  sopra  $41^\circ\text{C}$ . Le curve ad  $w$  costante diventano curve a TES costante.

La temperatura efficace standard fornisce una indicazione della percezione del caldo o del freddo, dato che essa risulta da una complessa interazione fra essere umano ed ambiente. Così un ambiente a  $30^\circ\text{C}$  con una umidità del 100% ha una temperatura efficace standard pari a circa  $34^\circ\text{C}$ , dunque viene percepito a temperatura maggiore. Uno studio statistico sempre condotto dalla ASHRAE, correla la TES con la sensazione termica ed identifica

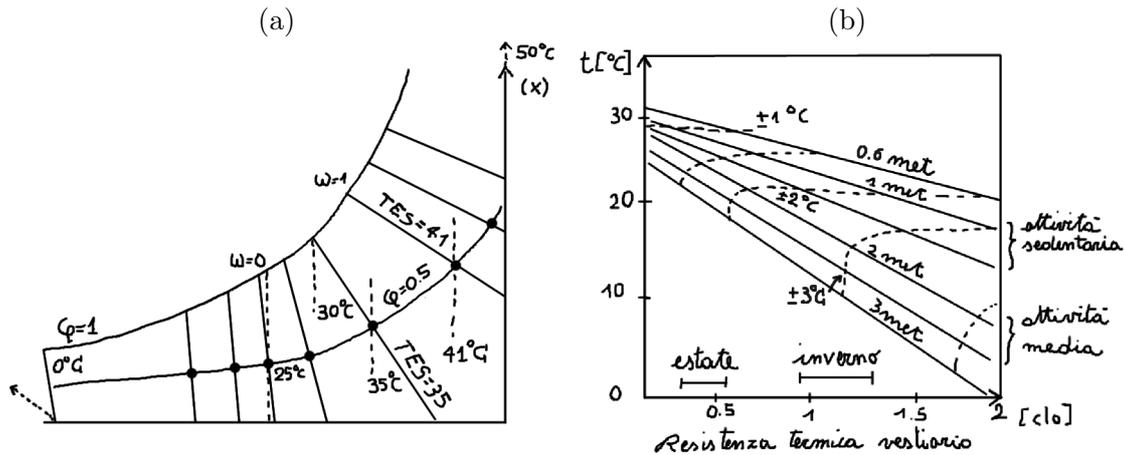


Figura 8.14: Temperatura efficace standard (a) e diagramma del benessere termico (b). Le curve tratteggiate nel diagramma di destra rappresentano lo scostamento massimo ammissibile rispetto ad una condizione di benessere.

sul diagramma psicrometrico delle zone di benessere fra due TES intorno a quella  $25^\circ C$ , di lieve disagio (leggermente caldo o leggermente freddo) e di forte disagio ecc... Tali zone di benessere si riferiscono sempre ad un individuo in attività sedentaria, vestito con abiti leggeri e posto in ambiente con aria leggermente mossa. Sono stati proposti dei grafici che permettono di calcolare la temperatura efficace standard per individui vestiti in modo diverso, in attività diversa e con velocità dell'aria ambiente diversa.

### 8.3.2 Metodo di Fanger

Fanger ha proposto dei diagrammi (detti *diagrammi del benessere*) le cui curve correlano fra loro parametri termofisici quali la resistenza termica del vestiario, la velocità di aria nell'ambiente, il tipo di attività ecc... quando il soggetto si trova in una condizione di *benessere*. In altre parole i diagrammi di Fanger permettono di determinare un insieme di parametri che definiscono una condizione di benessere. Si tratta di una sorta di superficie in uno spazio delle fasi relativamente ampio che individua i punti di benessere termoi-grometrico. Non viene fornita alcuna indicazione su condizioni che si discostano anche di poco da quella di benessere.

### 8.3.3 Il benessere secondo ISO 7730/84

Per il progettista è molto utile poter disporre di un diagramma del benessere termico che consenta di determinare la temperatura a cui deve portare un ambiente in funzione delle attività che in esso si svolgono. Assumendo un grado igrometrico del 50% ed una ventilazione trascurabile possiamo utilizzare i risultati di Fanger per tracciare il diagramma del benessere<sup>16</sup> illustrato in figura 8.14(b). In ordinata abbiamo la temperatura operativa dell'ambiente mentre in ascissa la resistenza termica del vestiario della gente che sta all'interno dell'ambiente. Con tratto continuo sono tracciate curve ad attività costante. Inoltre vengono riportate in linea tratteggiata le curve che definiscono lo scostamento massimo

<sup>16</sup>Secondo la normativa le condizioni riportate in tale diagramma garantiscono soddisfazione per il 90% dei soggetti intervistati.

rispetto ad una condizione di benessere. Così per un ambiente in cui lavorano impiegati in giacca e cravatta (1 clo) in attività sedentaria (1.2 met) la temperatura operativa deve essere mantenuta sui  $t_i = 20^{\circ}\text{C} \pm 2^{\circ}\text{C}$ , con una umidità relativa del  $\varphi_i = 50\%$ .

## Capitolo 9

# Misure meccaniche e termiche

### 9.1 Misure di temperatura

La *termometria* è la scienza sperimentale che presiede alla misura della temperatura. I principali argomenti della termometria pratica sono: i termometri primari (es: a gas perfetto e ad irraggiamento), i termometri secondari (termocoppie, termoresistenze, ecc...) ed i punti fissi che stanno alla base della Scala Internazionale Pratica di Temperatura (SIPT). I *termometri primari* sono associati a scale assolute di temperatura, cioè scale che fanno uso di proprietà termometriche di sistemi idealizzati, la cui equazione descrittiva contiene in modo semplice ed esplicito la temperatura termodinamica (es:  $pv = RT$ ,  $q = \sigma_0 T^4$ , ecc..). Nei *termometri secondari* la proprietà termometrica dipende dalla temperatura termodinamica attraverso relazioni complesse, spesso empiriche.

#### 9.1.1 Generalità sulla termometria

Il problema della definizione degli intervalli di temperatura non sta nella definizione dell'intervallo bensì nella metodologia per confrontare l'intervallo campione con quello in misura. Per le lunghezze e le masse si hanno i campioni ed il sistema di confronto mentre per gli intervalli di temperatura occorre definire dei livelli di temperatura (di solito 2 punti misurati con grande precisione) e fornire il criterio per l'interpolazione. La chiave sta nel trovare sistemi pratici e rigorosi per realizzare le interpolazioni. Originariamente si era utilizzato il grado Celsius definito fissando il il valore  $0.01^\circ\text{C}$  al punto triplo dell'acqua e  $100^\circ\text{C}$  in condizioni di ebollizione ad una pressione di 760 millimetri di mercurio (1.013 bar), interpolando ed estrapolando con termometri a dilatazione di liquido. Poiché termometri con liquidi diversi si comportavano diversamente, cioè non garantivano la linearità su tutta la scala e davano valori di temperatura diversi in zone lontane da 0 e 100 gradi, fu necessario ricorrere ad un altro sistema. Lord Kelvin propose la scala termodinamica basata sulle quantità di calore scambiate da una macchina di Carnot operante fra due serbatoi. Dette  $T_1$  e  $T_2$  le temperatura dei serbatoi e  $q_1$ ,  $q_2$  le quantità di calore scambiate si ha

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{T_1}{T_2} \tag{9.1}$$

Dunque il rapporto fra le temperature è uguale al rapporto fra i calori scambiate da una qualunque macchina di Carnot che opera fra tali serbatoi. Perciò scelto un valore di temperatura come riferimento (di norma il punto triplo dell'acqua,  $T_t = 273.16\text{ K}$ ), con la

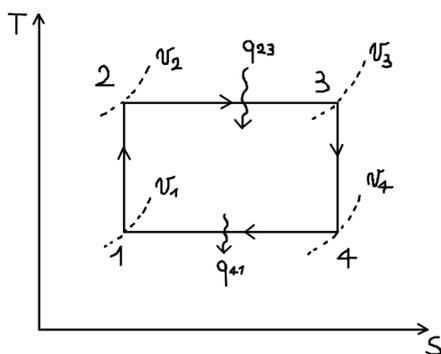


Figura 9.1: Ciclo di Carnot di un gas perfetto in un diagramma  $T - s$ .

(9.1) si determina tutta la scala. Tale sistema, indubbiamente rigoroso è privo di interesse pratico perché la macchina di Carnot, benché sia molto utile teoricamente, nella pratica non esiste. Pertanto ci si è concentrati sulle proprietà di alcuni gas ( $N_2$ ,  $He$ ) che in opportune condizioni si comportano come gas perfetti.

### 9.1.2 Termometri a gas

Se consideriamo un ciclo di Carnot compiuto da un gas perfetto possiamo dimostrare che la scala termodinamica coincide con quella del gas perfetto. Infatti se consideriamo il ciclo di Carnot percorso da un gas perfetto abbiamo che lungo le due isoterme ( $du = 0$ ) reversibili

$$q_{23} = \int_2^3 p dv = R\theta_2 \ln \left( \frac{v_3}{v_2} \right) \quad (9.2)$$

$$q_{14} = \int_1^4 p dv = R\theta_1 \ln \left( \frac{v_4}{v_1} \right) \quad (9.3)$$

Inoltre lungo le adiabatiche reversibili  $du = -p dv = -R\theta dv/v$  dalla quale

$$c_v \ln \left( \frac{\theta_2}{\theta_1} \right) = -R \ln \left( \frac{v_2}{v_1} \right) \quad (9.4)$$

$$c_v \ln \left( \frac{\theta_2}{\theta_1} \right) = -R \ln \left( \frac{v_3}{v_4} \right) \quad (9.5)$$

che se confrontate fra loro portano a concludere

$$\ln \left( \frac{v_2}{v_1} \right) = \ln \left( \frac{v_3}{v_4} \right) \Rightarrow \ln \left( \frac{v_4}{v_1} \right) = \ln \left( \frac{v_3}{v_2} \right) \quad (9.6)$$

Infine

$$\varepsilon_c = 1 - \left| \frac{q_{14}}{q_{23}} \right| = 1 - \left| \frac{\theta_1 \ln \left( \frac{v_3}{v_2} \right)}{\theta_2 \ln \left( \frac{v_4}{v_1} \right)} \right| = 1 - \left| \frac{\theta_1}{\theta_2} \right| = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (9.7)$$

Otteniamo cioè

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}} \quad (9.8)$$

Se assegnamo un valore comune alla scala di temperatura del gas perfetto ed a quella termodinamica, ad esempio  $\theta_{\text{ref}} = T_{\text{ref}} = 273.16$  K (punto triplo dell'acqua) allora dalla (9.8) deduciamo che  $\theta = T$  su tutta la scala.

Ciò permette di scrivere  $pv = RT$  in cui  $T$  è la temperatura termodinamica. Mentre il ciclo di Carnot è molto difficile da realizzare in pratica, un gas perfetto si realizza con relativa semplicità. Si è pertanto tralasciata la definizione di scala di temperatura utilizzando la macchina di Carnot per concentrarsi sulle proprietà di alcuni gas ( $He$ ,  $N_2$ ) che a basse pressioni hanno un comportamento praticamente coincidente con quello di un gas perfetto. In particolare, introducendo la comprimibilità isobara  $\beta$  ed il coefficiente di dilatazione isocoro  $\chi$

$$\beta = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (9.9)$$

$$\chi = \frac{1}{p} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \quad (9.10)$$

è possibile determinare, integrando rispettivamente lungo una isobara ed una isocora, le formule

$$v = v_0 e^{\int_{T_0}^T \beta(T) dT} \quad (9.11)$$

$$p = p_0 e^{\int_{T_0}^T \chi(T) dT} \quad (9.12)$$

Per un gas perfetto abbiamo

$$\beta(T) = \chi(T) = \frac{1}{T} \quad (9.13)$$

dunque

$$\int_{T_0}^T \beta(T) dT = \int_{T_0}^T \chi(T) dT = \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \quad (9.14)$$

Pertanto<sup>1</sup>

$$v = v_0 \frac{T}{T_0} \quad (\text{trasformazione isobara}) \quad (9.17)$$

$$p = p_0 \frac{T}{T_0} \quad (\text{trasformazione isocora}) \quad (9.18)$$

Normalmente si fissa  $T_0 = 273.16$  K al punto triplo dell'acqua, e si costruisce il termometro impiegando un contenitore a volume costante. Dalla lettura della pressione agente all'interno di tale contenitore si risale al valore di temperatura utilizzando la (9.18)<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Spesso si assume (e l'esperienza lo conferma) che  $\beta$  e  $\chi$  siano costanti e molto piccoli la qual cosa permette di espandere l'esponenziale che compare nelle (9.11) e (9.12) in serie di potenze intorno a 0 ottenendo

$$v = v_0 [1 + \beta(T - T_0) + \dots] \quad (9.15)$$

$$p = p_0 [1 + \chi(T - T_0) + \dots] \quad (9.16)$$

Notare che per  $\beta = \chi = 1/T_0$  ritroviamo le espressioni (9.17) e (9.18).

<sup>2</sup>Nelle condizioni atmosferiche l'aria secca è una miscela di gas che si comporta come un gas perfetto. Pertanto se isoliamo una certa quantità di aria (deidratata ed a pressione atmosferica) in un contenitore a tenuta a volume costante e disponiamo di micromanometro possiamo avere una lettura della temperatura molto precisa. Per tarare il termometro è sufficiente misurare la pressione quando il suddetto contenitore viene immerso in acqua ghiacciata e fissare il valore  $T_0 = 273.15$  K. Notare inoltre che la precisione sulla lettura della temperatura coincide con la precisione del micromanometro.

1)	Punto di ebollizione dell'ossigeno ( $p_0 = 1.013$ bar)	-182,97 °C
2)	Punto triplo dell'acqua ( $p_0 = 6.11$ mbar)	0.01 °C
3)	Punto di ebollizione dell'acqua ( $p_0 = 1.013$ bar)	100.00 °C
4)	Punto di ebollizione dello zolfo ( $p_0 = 1.013$ bar)	444.60 °C
5)	Punto di fusione dell'argento ( $p_0 = 1.013$ bar)	960.80 °C
6)	Punto di fusione dell'oro ( $p_0 = 1.013$ bar)	1064.43 °C

Tabella 9.1: Valori di temperatura di riferimento indicati nella scala internazionale pratica di temperatura (SIPT).

Riassumendo possiamo dire che il sistema pratico più rigoroso possibile per definire l'intervallo di temperatura comporta l'utilizzo di termometri a gas perfetto, un utilizzo pensabile solo in laboratori specializzati in misure termiche ad elevata precisione. In effetti per apprezzare un decimo di grado Celsius intorno a 20 °C occorre avere una sensibilità in pressione pari a

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{0.1}{293} = 0.00034 \quad (9.19)$$

Ciò significa che se il termometro a gas è costruito in modo tale che  $p_0 = 1$  bar, abbiamo bisogno di un manometro in grado di misurare il decimo di millibar intorno alla pressione di 1 bar. Se vogliamo apprezzare il centesimo di grado occorre avere uno strumento in grado di apprezzare il centesimo di millibar intorno ad una pressione media di un bar.

### 9.1.3 Scala internazionale pratica di temperatura (SIPT)

È nata dall'esigenza di avere un criterio pratico per definire gli intervalli di temperatura. La scala è basata su alcuni valori di temperatura noti (misurati con termometri a gas perfetto ad elevata precisione) e su certi strumenti di misura di temperatura di pratico impiego. Vengono fissati 6 valori di temperatura di riferimento riportati in tabella 9.1 e vengono prescritti le tipologie di strumenti da utilizzare nei vari intervalli.

**Interpolazione fra 0 °C e 660 °C** Per misurare temperature diverse dalle 6 riportate la SIPT prescrive di utilizzare un termometro a resistenza con filo di platino di specificata purezza fra 0 °C e 660 °C. Il termometro va tarato utilizzando la relazione

$$R = R_0 (1 + At + Bt^2) \quad (9.20)$$

in cui  $R_0$  a  $A$  e  $B$  sono coefficienti che possono essere determinati note le resistenze che il termometro misura in corrispondenza di 3 valori noti di temperatura (punti fissi 2, 3 e 4). Sotto 0 °C viene prescritto di impiegare sempre un termometro a resistenza di platino da tarare però secondo

$$R = R_0 (1 + At + Bt^2 + C(t - 100)t^2) \quad (9.21)$$

utilizzando i punti fissi 1, 2, 3 e 4).

**Interpolazione fra 660 °C e 1063 °C** Fra 660 °C e 1063.00 °C viene prescritto di utilizzare un termocoppia platino-platino rodio (tipo S), con la saldatura di riferimento (vd. capitolo termocoppie) posta alla temperatura di riferimento del punto fisso 2 determinando la f.e.m utilizzando la

$$e = a + bt + ct^2 \quad (9.22)$$

in cui le costanti  $a$ ,  $b$  e  $c$  si determinano misurando la f.e.m. ai punti fissi 5 e 6 ed alla temperatura di fusione dell'antimonio assunta pari a  $630.50^\circ\text{C}$ . Per temperature superiori a  $1063.00^\circ\text{C}$  viene utilizzato un pirometro tarato al punto fisso 6.

Questo è quello che prescrive la normativa che definisce la SIPT. Ora, è chiaro che negli impieghi tecnici ognuno può utilizzare lo strumento di misura che ritiene più opportuno. Ad esempio nessuno vieta di utilizzare una termocoppia per misura fra  $70^\circ\text{C}$  e  $150^\circ\text{C}$ . Lo strumento prescritto dalla SIPT verrà utilizzato soltanto per eseguire misure di assoluto rigore. Quindi per intervalli di temperatura comuni  $0 \div 660^\circ\text{C}$  a rigore occorrerebbe utilizzare una termoresistenza di platino tarata usando il punto triplo dell'acqua, il punto di ebollizione dell'acqua e quello dello zolfo a 1.013 bar.

#### 9.1.4 Termometri a dilatazione

Non sono molto utilizzati nell'industria data la loro fragilità e la difficoltà nel trasferire il segnale lontano dal punto in cui viene eseguita la misura. Il termometro a dilatazione di liquido è di gran lunga il più impiegato e di norma opera a volume costante. Bisogna garantire che il liquido conservi le sue proprietà termofisiche nel campo di impiego, in particolare occorre garantire che non vi sia nessuna transizione di stato. Così i termometri a mercurio possono essere utilizzati per misurare temperature fra  $-38^\circ\text{C}$  e  $357^\circ\text{C}$  (superiori se si mette in pressione il mercurio con azoto). Oltre al mercurio si usano alcool e pentano, soprattutto per le basse temperature. Utilizzando un tubo capillare a pareti rigide è possibile trasferire il segnale di temperatura dalla zona di misura (in cui vi è un bulbo pieno di liquido termodilatante) in un altro punto, misurando la pressione del circuito che ovviamente è in relazione alla dilatazione termica del liquido termodilatante. La misura di pressione può essere fatta ad esempio con un manometro a tubo di Burdon.

Al fine di eliminare gli effetti di eventuali riscaldamenti del fluido nel tubo capillare in una zona fra il bulbo e il manometro (riscaldamenti che porterebbero ad un errore di misura) si può procedere in due modi:

1. si affianca un eguale strumento privo di bulbo in grado di rilevare gli effetti della dilatazione lungo il tubo capillare. Sottraendo la lettura di tale strumento a quella dello strumento con bulbo si ottiene la misura della pressione dovuta solo alle variazioni di temperatura del bulbo.
2. Si inserisce all'interno del capillare un elemento di compensazione (filo di invar) che si dilata opportunamente in modo da ridurre quanto possibile i disturbi nella trasmissione del segnale di pressione. Se il bulbo è posto a temperatura  $t_1$  ed il capillare si trova in un ambiente in cui  $t_2 < t_1$  occorre un elemento (filo di invar) che si dilati in modo tale da compensare la contrazione termica del liquido corrispondente a  $t_1 - t_2$ . Talvolta la compensazione è concentrata in un tratto limitato del tubo di collegamento.

#### 9.1.5 Termometri a lamina bimetallica

Sono quelli che si usano nelle gelaterie per controllare la temperatura del frigorifero, vicino al gelato. Essi si basano sulla dilatazione differenziale di due lamine metalliche saldate fra loro ed aventi diverso coefficiente di dilatazione termica.

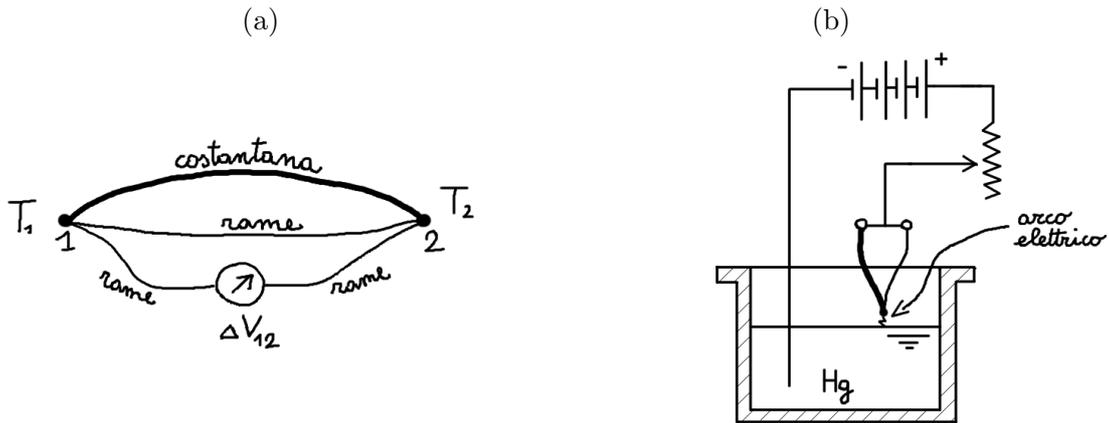


Figura 9.2: (a) Effetto Seebeck (1821) (notare che i fili del millivoltmetro sono dello stesso materiale di uno dei due impiegati nella termocoppia; in caso contrario si avrebbero tre termocoppie). (b) Schema di un sistema di saldatura a mercurio realizzare la giunzione fra i metalli della termocoppia.

### 9.1.6 Termocoppie

Congiungendo fra loro le estremità di due conduttori differenti e tenendo le giunzioni a temperatura diverse, nasce una forza elettromotrice (dell'ordine di qualche decina  $\mu\text{V}$ ) proporzionale alla differenza di temperatura fra le giunzioni. Questo fenomeno fu osservato da Seebeck nel 1821 ed appartiene a quella classe di fenomeni noti come *effetti termoelettrici*. In realtà Seebeck misurò una sovrapposizione di due effetti termoelettrici, il secondo dei quali fu illustrato successivamente da Thompson (Lord Kelvin) nel 1854. Thompson scoprì che in un conduttore in cui è presente un gradiente di temperatura si genera una differenza di potenziale proporzionale al gradiente di temperatura<sup>3</sup>. Ciò è dovuto ad una redistribuzione dei portatori di carica, redistribuzione generata appunto dal gradiente di temperatura. Oltre all'effetto Seebeck ed all'effetto Thompson ricordiamo altri effetti termoelettrici importanti: l'effetto Joule e l'effetto Peltier (1834). Quest'ultimo è alla base della refrigerazione termoelettrica. Nell'impiego pratico la giunzione fra i fili della termocoppia è fatta arrotolando i fili fra loro ed eventualmente migliorando il contatto fra loro con una saldatura (vd. figura 9.3(b)). Due leggi sono importanti per l'impiego delle termocoppie

1. *Legge del metallo intermedio*: in un circuito costituito da due metalli aventi le saldature alle temperature  $T_1$  e  $T_2$ , se apriamo una delle due saldature e interponiamo fra esse un metallo differente da quello delle termocoppie la differenza di potenziale non cambia purché le giunzioni restino alle stesse temperature. Notiamo che se chiudiamo il circuito con un terzo metallo in pratica ci troviamo tre termocoppie aventi due saldature alla stessa temperatura ed una a temperatura differente. Il sistema si comporta in modo tale da rendere la presenza del terzo metallo neutrale. È chiara l'importanza pratica di questa legge. Per misurare la forza elettromotrice in una

<sup>3</sup>L'effetto Thompson è all'origine di una non linearità fra la tensione e la corrente che circola in un conduttore in cui vi è un gradiente di temperatura.

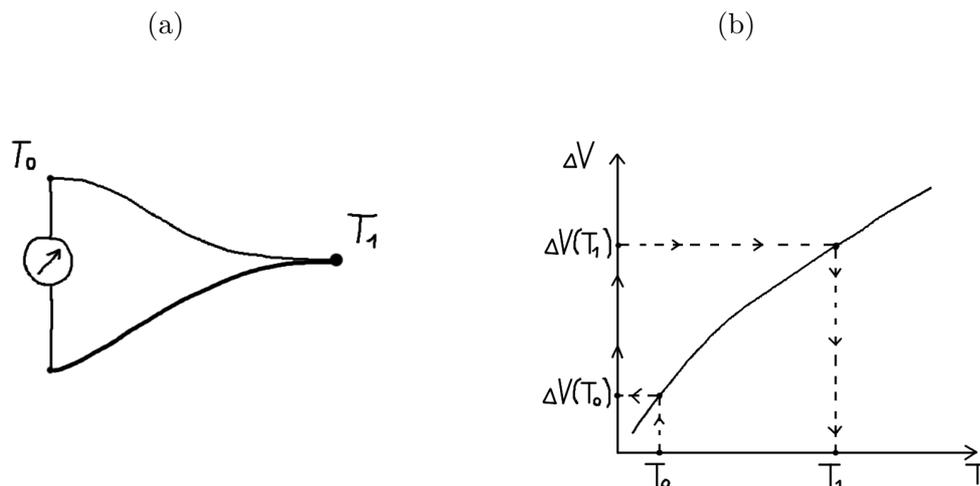


Figura 9.3: (a) Legge del metallo intermedio e (b) determinazione della temperatura  $T_1$  utilizzando una lettura di  $T_0$  e la curva di taratura della termocoppia.

termocoppia è possibile aprire una delle due giunzioni collegando le due estremità ai morsetti di un millivoltmetro. Il circuito si chiude all'interno dello strumento di misura.

2. *Legge della temperatura intermedia*: la forza elettromotrice in una termocoppia fra le temperature  $T_1$  e  $T_3$  è pari alla somma delle forze elettromotrici di due termocoppie (costruite con gli stessi materiali) che operano fra  $T_1$  e  $T_2$  e fra  $T_2$  e  $T_3$  rispettivamente, in cui  $T_2$  è una arbitraria temperatura fra  $T_1$  e  $T_3$ .

Il millivoltmetro fornisce in ogni caso una lettura di potenziale proporzionale alla differenza di temperatura  $T_1 - T_0$ . Normalmente la  $T_0$  non è nota con certezza. Occorrerebbe una misura con un altro termometro per determinarla, e poi bisognerebbe utilizzare la legge della temperatura intermedia per eseguire la lettura con la termocoppia. In pratica (vd. figura 9.3(b)) si entra nella curva caratteristica della termocoppia con la temperatura misurata ai morsetti del voltmetro, individuando  $\Delta V(T_0)$ . Si somma a  $\Delta V(T_0)$  la quantità  $\Delta V(T_1) - \Delta V(T_0)$  che viene letta direttamente dal millivoltmetro e si controlla la temperatura che corrisponde alla differenza di potenziale  $\Delta V(T_1)$ .

Ovviamente è possibile amplificare il segnale utilizzando un collegamento in serie o in parallelo di più termocoppie come illustrato in figura 9.4. Analizzando tale la figura ci accorgiamo che possiamo utilizzare l'addittività delle tensioni che corrispondono a temperature differenti per realizzare un sistema di misura mediante termocoppie che non necessita della misura della temperatura ai morsetti del millivoltmetro. I collegamenti in serie ed in parallelo realizzati in figura 9.5 forniscono entrambi una differenza di potenziale nulla ai morsetti del voltmetro. Si tratta infatti della somma di due differenze di potenziale uguali ed opposte. Tuttavia se una delle due termocoppie è posta a temperatura diversa da  $T_1$  il voltmetro registra un segnale che dipende solo da  $T_1 - T_2$ . Se  $T_2$  è nota, ad esempio è quella di un bagno termostatico allora abbiamo depurato la lettura del millivoltmetro dal valore di temperatura dei suoi morsetti. Notiamo che nel collegamento di figura 9.6(a) non ha alcuna importanza la temperatura  $T_0$  a cui viene posta la giunzione fra due metalli identici, pertanto lo schema pratico di misura è quello di 9.6(b).

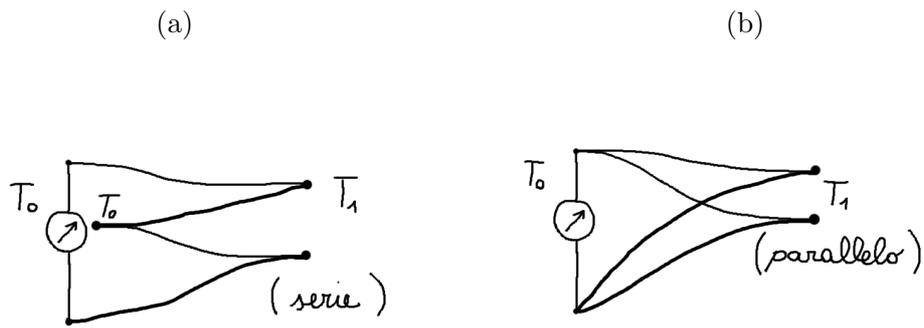


Figura 9.4: Collegamento in serie (a) ed in parallelo di più termocoppie al fine di amplificare il segnale in tensione.

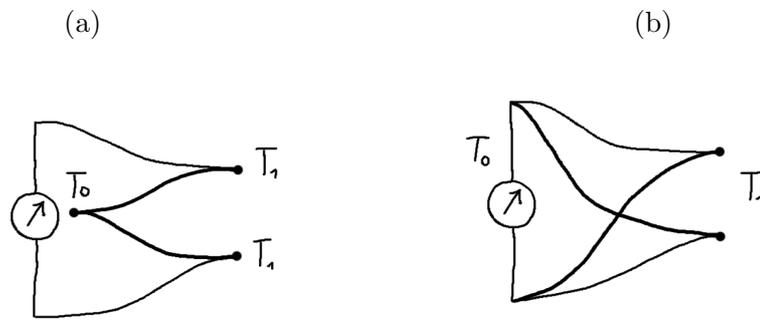


Figura 9.5: Collegamento in “controfase” in serie (a) ed in parallelo (b): il millivoltmetro registra  $\Delta V = 0$  in entrambi i casi.

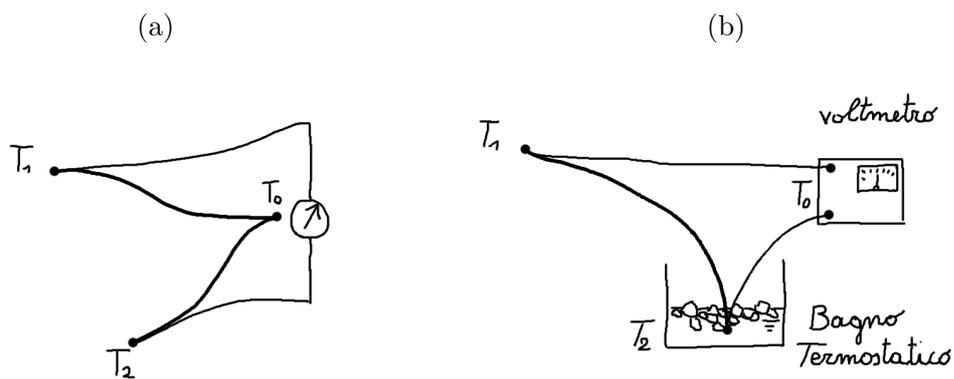


Figura 9.6: Compensazione della temperatura  $T_0$  mediante bagno termostatico. Il millivoltmetro registra una tensione che dipende solo dalla differenza di temperatura  $T_1 - T_2$ .

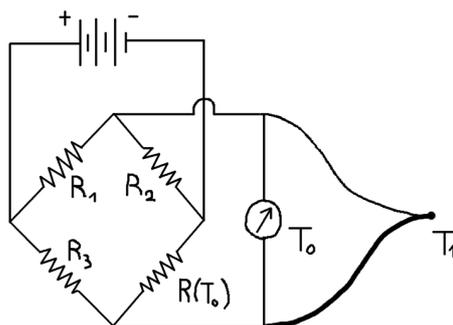


Figura 9.7: Sistema di misura di temperatura utilizzando una termocoppia ed un millivoltmetro autocompensato (per quella termocoppia) con un ponte di Wheatstone.

Il metodo del bagno termostatico viene solitamente utilizzato per eseguire misure di precisione. Vi sono millivoltmetri dedicati alla lettura dei segnali delle termocoppie che hanno al loro interno un *punto di zero*. In tutti gli altri casi si utilizza un circuito elettrico di compensazione (un ponte di Wheatstone) tale da produrre una forza elettromotrice identica a quella generata da  $T_0$  in prossimità dei morsetti del voltmetro. Tale circuito di compensazione è integrato nel millivoltmetro stesso realizza compensazioni diverse per diversi tipi di termocoppie standardizzate (platino-platino rodio “S”, rame-costantana “T”, ferro-costantana “J”, chromel-alumel “K”, ecc...).

**Osservazione** Gli effetti termoelettrici sono ben noti fin dal 1800. Oltre all’effetto Seebeck (1821) e all’effetto Peltier (1834) vi è anche l’effetto *Thompson* (1854-Lord Kelvin). Qualora si applichi un gradiente di temperatura entro un conduttore elettrico si determina non solo un flusso di calore, ma anche un campo elettrico. Ciò è dovuto ad una ridistribuzione dei portatori di carica nell’interno del conduttore. Se il gradiente di temperatura è sufficientemente piccolo si trova che il campo elettrico è proporzionale ad gradiente di temperatura. In una dimensione, per esempio lungo un filo si trova

$$E_x = P \frac{dT}{dx} \quad (9.23)$$

ove  $P$  si dice *potere termoelettrico assoluto*. Inversamente, se si fa circolare corrente in un conduttore in cui vi è un gradiente di temperatura gli elettroni interagiscono con il campo  $E_x$  e gli effetti di tale interazione macroscopicamente si traducono in una dissipazione che si aggiunge a quella nota come effetto Joule. Questa dissipazione supplementare risulta comunque essere trascurabile rispetto alla prima, ma è responsabile di un comportamento non lineare fra tensione e corrente.

### Materiali per termocoppie

I metalli per le termocoppie sono scelti in modo tale da avere la maggior variazione di forza elettromotrice a parità di variazione di temperatura. Tale variazione rimane comunque dell’ordine di qualche decina microvolt per ogni grado Celsius di differenza di temperatura ( $42 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$  per le termocoppie più diffuse di tipo T, rame-costantana). Devono anche avere

Sigla	Materiali	$T_{max}$	$\Delta V$ fra $0 \div 100^\circ\text{C}$
S	Platino-Platino Rodio (90% Pt - 10% Rh)	$1400^\circ\text{C}$	$6.6 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$
T	Rame-Costantana (60% Cu - 40% Ni)	$400^\circ\text{C}$	$42 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$
J	Ferro-Costantana (60% Cu - 40% Ni)	$850^\circ\text{C}$	$53 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$
K	Chromel(Ni-Cr)-Alumel (Ni-Al)	$1100^\circ\text{C}$	$41 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$

Tabella 9.2: Composizione delle principali termocoppie e campo di impiego. Il primo dei due metalli è quello a polarità positiva.

buona resistenza meccanica e produrre una fem preferibilmente lineare con la temperatura e scarsamente dipendente dalle caratteristiche termoelettriche degli stessi metalli. In pratica sono poche le coppie di metalli impiegati. Esse sono riportate in tabella 9.2 Nella pratica la lettura della tensione di più termocoppie viene centralizzata attraverso l'impiego di un multimetro ad alta precisione autocompensato. Spesso la lettura di tensione viene automaticamente convertita in temperatura utilizzando delle relazioni inverse nella forma

$$T = \sum_k a_k (\Delta V)^k \quad (9.24)$$

che sono facilmente calcolabili nota la curva di taratura  $\Delta V(T)$ . La centralizzazione della lettura spesso porta alla necessità di avere punti di misura di temperatura lontani dal punto in cui viene letta la tensione. È sconveniente realizzare i cavi di collegamento con materiale (costoso) per termocoppie, ed è scorretto utilizzare cavi conduttori arbitrari dato che in quest'ultimo caso la compensazione in prossimità del multimetro è inefficace essendo il giunto freddo della termocoppia molto lontano. Pertanto si utilizzano cavi di materiale molto simile a quelli delle termocoppie impiegate, detti *cavi di compensazione*. Questa soluzione, largamente impiegata nelle misure industriali, deve comunque essere esclusa nelle misure di precisione.

### Taratura delle termocoppie

La taratura è un procedimento atto a determinare la relazione fra la temperatura e la tensione di una particolare termocoppia. A tal fine si utilizza il sistema illustrato in figura 9.6(b) e si assume una certa relazione fra la temperatura e la tensione, ad esempio

$$V = a + bT + cT^2 \quad (9.25)$$

In realtà con lo schema di figura 9.6(b) siamo in grado di misurare una tensione corrispondente ad una differenza di temperatura  $\Delta T = T - T_{\text{ref}}$ . Dunque la curva di taratura deve essere posta nella forma

$$V = a + b\Delta T + c\Delta T^2 \quad (9.26)$$

Si procede misurando la tensione corrispondente a 3 differenze di temperatura note (una delle quali può anche includere  $\Delta T \equiv 0$ , per cui si ha ovviamente  $\Delta V = 0$  al voltmetro) e si interpolano i tre valori di tensione calcolandosi i coefficienti  $a$ ,  $b$  e  $c$ . È possibile poi traslare il risultato in funzione della sola  $T$

$$\begin{aligned} V &= [a + bT_{\text{ref}} + cT_{\text{ref}}^2] + [b + 2cT_{\text{ref}}]T + cT^2 \\ &= a_1T + b_1T + c_1T^2 \end{aligned} \quad (9.27)$$

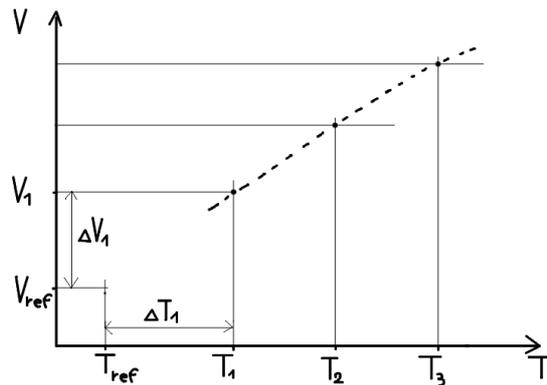


Figura 9.8: Taratura delle termocoppie. Determinata la relazione  $\Delta V (\Delta T)$  mettendo la giunzione di riferimento a  $T_{\text{ref}}$  è possibile determinare la relazione  $\Delta V (T)$  in funzione della sola  $T$ . Questa relazione può essere successivamente utilizzata qualunque sia la temperatura della giunzione di riferimento.

che rappresenta la curva di taratura della termocoppia. Chiaramente se mettiamo la giunzione di riferimento alla temperatura  $T'_{\text{ref}}$  possiamo utilizzare la curva di taratura (9.27) ed eseguire la misura seguendo lo schema di figura 9.3(b). Notiamo infine che il potenziale di riferimento  $V_{\text{ref}}$  è del tutto inessenziale ai fini del calcolo della curva di taratura. Quest'ultima può essere traslata verso l'alto o verso il basso senza alterare i valori di temperatura forniti.

### 9.1.7 Termoresistenze

È noto infatti che la resistività dei conduttori (e dei semiconduttori) varia con la temperatura<sup>4</sup>. I termometri a variazione di resistenza elettrica utilizzano proprio una variazione di resistività dell'elemento sensibile per ottenere una misura di temperatura. L'elemento sensibile è normalmente un filo di platino avvolto su elemento in vetro o porcellana, poi ricoperto (sempre in vetro o porcellana) per protezione. La misura della resistenza, funzione della temperatura può essere fatta con un ponte di Wheatstone. I materiali per termoresistenze devono avere una notevole dipendenza della resistività dalla temperatura e preferibilmente tale dipendenza deve essere lineare. Nella pratica si impiegano il platino, sostituito solo per ragioni di costo dal nickel e dal rame per le basse temperature.

I cavi di collegamento, anch'essi di materiale conduttore, presentano una dipendenza della resistività dalla temperatura e pertanto sono fonte di errore sistematico di misura. Inoltre vi sono le resistenze di contatto dovute ai collegamenti. Al fine di eliminare l'influenza dei cavi di collegamento si realizza una compensazione con altri cavi identici a quelli utilizzati. Alla fine dei conti il cavo che porta la termoresistenza ha 3 fili, uno che

<sup>4</sup>Nei materiali conduttori la resistività elettrica cresce con la temperatura mentre nei semiconduttori ad un aumento di temperatura corrisponde una riduzione della resistività. Ciò è dovuto al meccanismo sostanzialmente differente che genera la conduzione elettrica. In un semiconduttore se la temperatura cresce, cresce il moto di agitazione termica ed aumenta la probabilità che gli elettroni del semiconduttore vengano promossi dalla banda di valenza a quella di conduzione.

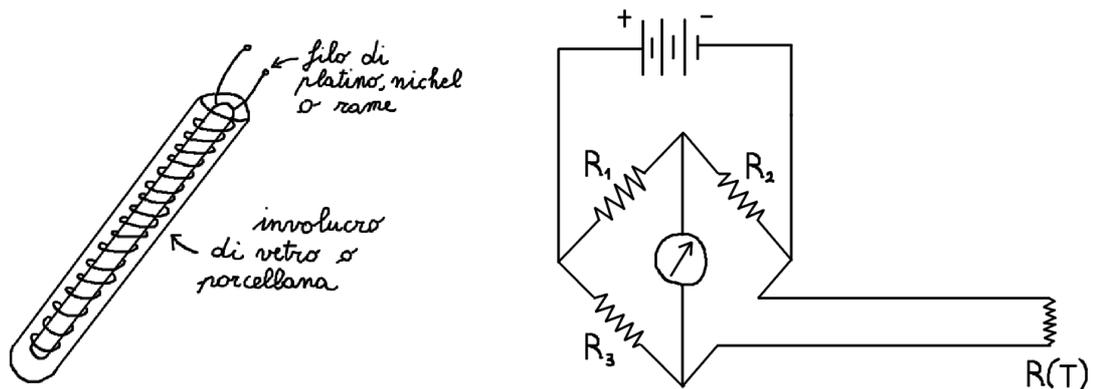


Figura 9.9: Schema di una termoresistenza e semplice sistema di misura senza compensazione. La misura viene eseguita per azzeramento, variando una resistenza adiacente a  $R(T)$  fino ad azzerare il Galvanometro.

va direttamente al galvanometro, gli altri due che si allacciano a due rami adiacenti del ponte di Wheatstone.

### 9.1.8 Termistori

Un caso particolare di termometro a resistenza è costituito dal termistore in cui l'elemento sensibile è costituito da un semiconduttore (in genere una miscela di ossidi metallici sinterizzati). Come noto la resistenza elettrica di un semiconduttore cala al crescere della temperatura ed in modo molto più marcato di quanto accade per i conduttori metallici. Infatti al crescere della temperatura aumenta il numero di elettroni promossi alla banda di conduzione. Pertanto hanno una sensibilità molto maggiore (per la coppia di semiconduttori drogati  $Bi_2Te_3(p) - Bi_2Te_3(n)$  (Bismuto-Tellurio) abbiamo  $420 \mu V/K$ ) ed ingombri molto ridotti: è possibile realizzare termistori miniaturizzati.

### 9.1.9 Influenza dell'irraggiamento termico nelle misure di temperatura

Quando una termocoppia od una termoresistenza vengono utilizzate per misurare la temperatura di un fluido confinato in un ambiente le cui pareti si trovano a temperatura differente da quelle del fluido è opportuno controllare che il contributo dell'irraggiamento termico non sia determinante. Ad esempio se misuriamo la temperatura dei gas di scarico di un motore alternativo ad accensione per scintilla o per compressione è evidente che il contributo dell'irraggiamento del collettore di scarico ( $\simeq 300^\circ C$ ) potrebbe introdurre errori di misura. In particolare possiamo eseguire il seguente bilancio di potenza sulla termocoppia (supponiamo  $T_f > T_t > T_w$ )

$$h(T_f - T_t) = e\sigma_0(T_t^4 - T_w^4) \quad (9.28)$$

cioè la potenza ceduta dal fluido alla termocoppia è pari alla potenza che la termocoppia scambia per irraggiamento con pareti che contengono il fluido. Talvolta il fenomeno di scambio è tale da alterare il valore di  $T_t$ , rendendolo apprezzabilmente differente da  $T_f$ .

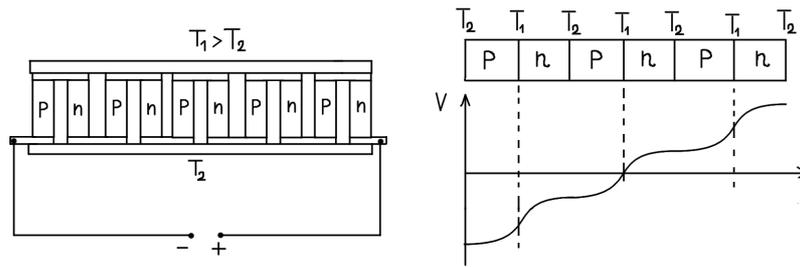


Figura 9.10: Schema di un generatore termoelettrico a semiconduttore.

### 9.1.10 Generatori e refrigeratori termoelettrici

Se applichiamo il primo principio della termodinamica troviamo che il lavoro elettrico prodotto da un generatore o richiesto da un refrigeratore termoelettrico è pari alla differenza fra le quantità di calore scambiate con due serbatoi di calore

$$\Delta Q = L_{el} \quad (9.29)$$

Un *generatore termoelettrico* è un apparato che sfrutta l'effetto Seebeck di un sistema di termocoppie o meglio di un sistema di semiconduttori collegati fra loro in serie mantenuti a contatto con due sorgenti di calore a temperatura diversa. Tale differenza di temperatura sostiene una corrente a cui può essere attaccato un carico. In altre parole il lavoro elettrico prodotto per effetto Seebeck può essere utilizzato per produrre energia elettrica. Una giunzione a semiconduttore ha un elevato potere termoelettrico. Ad esempio per la giunzione a semiconduttori  $Bi_2Te_3(p) - Bi_2Te_3(n)$  (Bismunto-Tellurio) abbiamo  $420 \mu V/K$ . Il generatore termoelettrico è reversibile. Il fenomeno venne studiato per la prima volta da Peltier nel 1834, 13 anni dopo gli esperimenti di Seebeck (1821). Se viene fornita energia elettrica ad un sistema di termocoppie o un sistema di semiconduttori, le giunzioni si portano a temperature differenti ed è possibile impiegare la macchina come frigorifero. In pratica, dipendentemente dal verso della corrente (continua) una giunzione diventa calda l'altra fredda e la differenza fra le potenze scambiate dalle giunzioni con due serbatoi di calore è pari al lavoro elettrico fornito.

## 9.2 Misure di velocità nei fluidi

### 9.2.1 Tubo di Pitot

Si tratta di uno dei più antichi strumenti di misura. I primi studi al riguardo risalgono al 1732. Uno schema costruttivo (dovuto a Prandtl) le cui proporzioni assicurano un buon funzionamento è illustrato in figura 9.11. Il tubo di Pitot misura indirettamente la velocità di un fluido attraverso una misura della pressione statica  $p_0$  e della pressione di ristagno  $p_1$  (detta anche pressione dinamica). La differenza di pressione  $p_1 - p_0$  può essere letta direttamente su un micromanometro differenziale.

Possiamo determinare analiticamente la relazione che intercorre fra la velocità del fluido e la differenza di pressione nel caso in cui si tratti di un processo di ristagno isoentropico

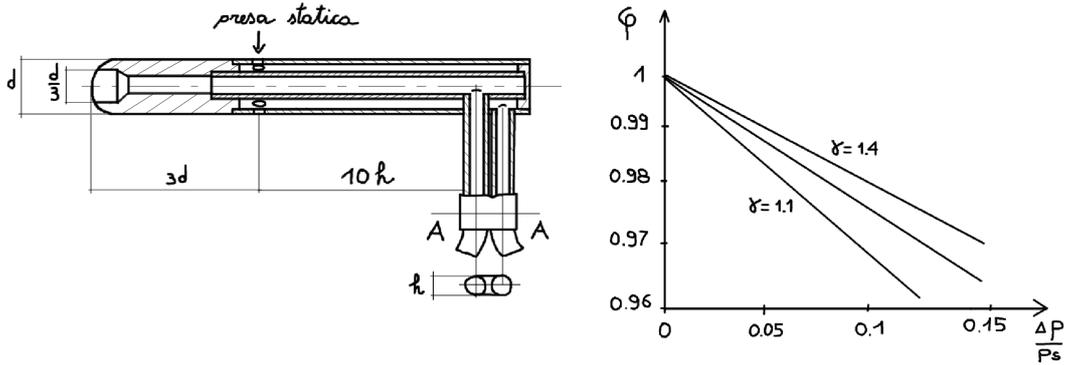


Figura 9.11: Tubo di Pitot secondo il disegno di Prandtl. Dato il diametro della sonda basta prendere 1/3 e 3 volte tale valore per sagomare la punta e le 2 prese di pressione. Si considera  $10h$  per la lunghezza dello stelo. A destra è riportato l'andamento del fattore di correzione per fluidi comprimibili definito dall'equazione (9.36).

( $\rho = Cp^{1/\gamma}$ ) di un gas perfetto. Infatti, considerando l'equazione di Bernoulli

$$-\frac{v_0^2}{2} + \int_0^1 \frac{dp}{\rho} = 0. \quad (9.30)$$

e supponendo il processo di ristagno adiabatico e reversibile

$$\int_0^1 \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{C} \int_0^1 p^{-1/\gamma} dp = \frac{1}{C} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( p_1^{(\gamma-1)/\gamma} - p_0^{(\gamma-1)/\gamma} \right) \quad (9.31)$$

da cui, raccogliendo  $p_0^{(\gamma-1)/\gamma}$ ,

$$\int_0^1 \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0^{1-1/\gamma}}{p_0^{-1/\gamma} \rho_0} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \beta^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right) = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \beta^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right), \quad \beta = \frac{p_1}{p_0} \quad (9.32)$$

otteniamo<sup>5</sup>

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)} \quad (9.34)$$

Pertanto dalla misura della pressione statica  $p_0$ , della dinamica  $p_1$  e della temperatura della corrente indisturbata possiamo calcolare la velocità del fluido impiegando (9.35). La misura di temperatura serve a calcolarsi  $\rho_0(p_0, T_0)$ . Se si tratta di un fluido incomprimibile abbiamo ovviamente

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{p_1 - p_0}{\rho_0}} \quad (9.35)$$

<sup>5</sup>È anche possibile dimostrare questa relazione utilizzando il concetto di entalpia di ristagno e le varie grandezze totali che ne conseguono. Considerando un gas perfetto

$$\frac{v_0^2}{2} = h_1 - h_0 = c_p (T_1 - T_0) = c_p T_0 \left( \beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \quad (9.33)$$

dalla quale considerando che  $c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$  si ottiene (9.34).

Talvolta la relazione (9.35), modificata con un coefficiente correttivo  $\varphi$ , viene impiegata anche per fluidi comprimibili

$$v = \varphi \sqrt{2 \frac{p_1 - p_0}{\rho_0}} \quad (9.36)$$

ove, dal confronto fra (9.36) e (9.34), risulta

$$\varphi = \sqrt{\frac{p_0}{p_1 - p_0} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \left[ 1 + \frac{p_1 - p_0}{p_0} \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)} \quad (9.37)$$

che dipende esclusivamente da  $(p_1 - p_0)/p_0$  e  $\gamma$  (vd. figura 9.11). Il vantaggio della relazione (9.36) sta nella sua semplicità, soprattutto se il coefficiente  $\varphi$  viene fornito in un grafico in funzione del rapporto di pressione  $(p_1 - p_0)/p_0$  e del coefficiente  $\gamma = c_p/c_v$ . L'asse della sonda deve coincidere con la direzione dei filetti fluidi. Pertanto il tubo Pitot va orientato se non è nota a priori la direzione di tali filetti. A tal fine è talvolta pratico l'impiego di una sonda a 5 prese.

### 9.2.2 Mulinello ed anemometro

Si tratta di strumenti che utilizzano la velocità di rotazione di una girante palettata esposta alla corrente per determinarne la velocità. Il mulinello viene impiegato per misure di velocità di fluidi incomprimibili (liquidi), pertanto deve presentare una tipologia costruttiva che lo renda durevole ed affidabile in presenza di liquido. Per contro l'anemometro viene impiegato per misure di velocità in fluidi comprimibili, dunque ha pale molto più leggere ed ampie. Entrambi questi strumenti non sono assoluti ma vanno tarati.

### 9.2.3 Anemometro a filo caldo

L'anemometro a filo caldo è uno strumento che misura la velocità dei fluidi attraverso una misura di resistenza elettrica. La sonda di un anemometro a filo caldo ha l'elemento sensibile costituito da un filo (generalmente di platino) riscaldato dal passaggio di una corrente elettrica di norma costante. Se esposto ad flusso di un fluido avente temperatura nota, la temperatura del filo si riduce e tale riduzione induce una variazione di resistenza elettrica. Lo strumento va tarato. La sonda è di dimensioni estremamente ridotte ed ha una velocità di risposta eccezionalmente rapida. Purtroppo il sistema di misura è piuttosto complesso ed inoltre lo strumento va impiegato con cura per non incorrere in facili errori.

### 9.2.4 Laser Doppler

Si tratta di uno strumento preciso che sfrutta l'effetto doppler di un raggio laser collimato in un punto. Permette perciò di eseguire misure puntuali ad elevata precisione e l'apparato di misura è piuttosto complesso e costoso.

### 9.2.5 Particle image velocimetry (PIV)

Si tratta di uno strumento che impiega laser impulsato o continuo per ricostruire mediante algoritmi di interpolazione la traiettoria di opportuni traccianti (particelle) che vengono diffusi nel fluido. Catturando delle coppie di immagini ad istanti di tempo molto

ravvicinati è possibile avere una mappa del campo di moto dettagliata e relativamente precisa.

### 9.3 Misure di portata

Si tratta di misure che ricorrono con grande frequenza<sup>6</sup> sia nell'industria che nei laboratori di ricerca. Vi sono diversi metodi per misurare la portata. Per misure di buona precisione si impiegano degli strumenti, detti *contatori* o *totalizzatori* che forniscono una indicazione sul volume di fluido che li ha attraversati. Possiamo avere contatori per gas (a secco<sup>7</sup>, a lobi, a ruote dentate ovali e a palette) oppure contatori per liquidi (a palette, a disco oscillante<sup>8</sup>). I contatori pertanto non forniscono una vera e propria misura di portata (occorrerebbe calcolare la derivata rispetto al tempo di un segnale di un contatore per avere una indicazione sulla portata istantanea). Vi sono tuttavia altri strumenti (flussimetri, venturimetri, diaframmi e boccagli) molto diffusi nella pratica industriale che forniscono una indicazione proporzionale alla portata istantanea, cioè si tratta di misuratori di portata propriamente detti. Tali strumenti sono indispensabili laddove si richieda una *regolazione* della portata. Se le portate in gioco divengono molto elevate, come accade ad esempio nella misura della portata di un fiume, è ovviamente sconveniente ed impossibile realizzare un totalizzatore od un diaframma per fiume. In questi casi conviene eseguire una serie di misure puntuali di velocità (ad esempio con dei mulinelli) e ricostruire il profilo per interpolazione. Nota l'area della sezione poi si calcola facilmente la portata.

#### 9.3.1 Misure di portata con dispositivi a strozzamento: diaframmi, boccagli e venturimetri

Nell'attraversamento di una qualunque restrizione di sezione in una condotta il fluido subisce una perdita di pressione proporzionale al quadrato della velocità, dunque al quadrato della portata. La relazione che lega la perdita di pressione alla portata dipende dalla geometria dello strozzamento e dalla condizione di moto (numero di Reynolds). Tale relazione va pertanto determinata sperimentalmente per taratura. Onde evitare di eseguire tale operazione di taratura per ogni dispositivo di strozzamento sono stati adottati dei *tipi unificati*: diaframmi, boccagli e venturimetri. La presenza di una ostruzione in una condotta attraversata da un fluido incompressibile causa una perdita di pressione che se moltiplicata per la portata volumetrica fornisce una indicazione della potenza idraulica dissipata. Chiaramente laddove tale potenza è trascurabile, conviene spendere poco e misurare la portata con un diaframma (meno costoso di un boccaglio e un venturimetro). Per contro, nelle grandi condotte vengono impiegati dei venturimetri ben raccordati poiché la potenza idraulica dissipata (potenza che normalmente viene fornita dall'impianto di pompaggio) nel caso di un diaframma sarebbe inaccettabile. Tutti i dispositivi di strozzamento devono essere preceduti e seguiti da un tratto di condotta rettilineo e sufficientemente lungo onde evitare che gli effetti di singolarità (curve, valvola, ecc..) influenzino la misura.

---

<sup>6</sup>Ad esempio tutte le volte che si ha necessità determinare la potenza effettiva scambiata attraverso una certa apparecchiatura note le entalpie in ingresso ed uscita.

<sup>7</sup>Questa tipologia è quella che misura la quantità di metano che ci entra in casa.

<sup>8</sup>Questa tipologia è quella che misura la quantità di acqua che ci entra in casa.

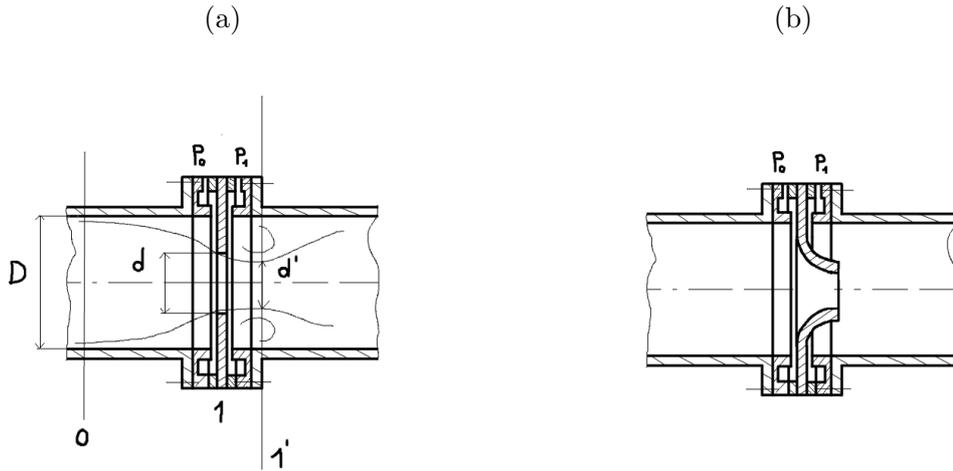


Figura 9.12: Schemi di montaggio di un diaframma (a) e di un bocaglio (b) con prese di pressione in camera anulare.

### Diaframmi e bocagli

Si tratta dei sistemi di strozzamento più semplici il cui montaggio è illustrato in figura 9.12). Nel caso di un diaframma abbiamo grosse perdite di carico idraulico e la sezione di vena contratta avente diametro  $d'$  si realizza a valle dello strozzamento. Considerando il fluido incomprimibile, ed applicando il bilancio integrale di energia meccanica e l'equazione di continuità ( $v_1 S_1 = v_2 S_2$ ) è possibile determinare la seguente espressione per la portata in massa

$$\dot{m} = c_m \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2\rho(p_0 - p_1)} \quad (9.38)$$

in cui  $d$  è il diametro del diaframma e  $c_m$  è un *coefficiente di portata* che va determinato sperimentalmente<sup>9</sup>. Come appare dalla (9.42) il coefficiente di portata dipende dal rap-

<sup>9</sup>Solitamente, nella trattazione dei diaframmi e dei bocagli si introduce un coefficiente di contrazione di vena  $c_c$  che viene definito dall'equazione di continuità:

$$v_1 \underbrace{d^2 c_c^2}_{d'^2} = v_0 D^2 \quad (9.39)$$

Applicando l'equazione di bilancio integrale dell'energia meccanica fra 0 e 1' e trascurando ogni perdita possiamo determinare

$$v_1' = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_1)}{\rho \left(1 - \left(\frac{c_c d}{D}\right)^4\right)}} \quad (9.40)$$

da cui possiamo ricavare la portata

$$\dot{m} = \frac{\pi d^2}{4} c_m' \sqrt{2\rho(p_0 - p_1')} \quad (9.41)$$

avendo definito il coefficiente di portata

$$c_m' = \frac{c_c^2}{\sqrt{\rho \left(1 - \left(\frac{c_c d}{D}\right)^4\right)}} \quad (9.42)$$

Se consideriamo la sezione 1 invece della sezione di vena contratta avremo un altro coefficiente di portata.

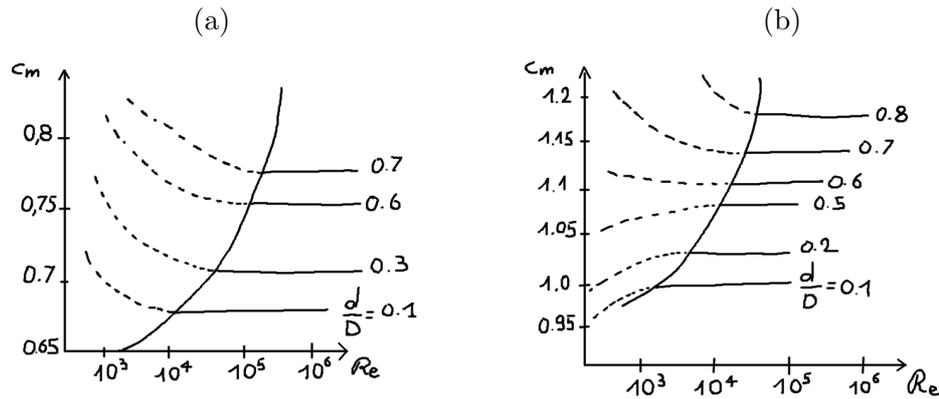


Figura 9.13: Coefficienti di portata per diaframmi (a) e bocchigli (b). Notare la presenza di un valore di  $Re$  oltre il quale una curva a rapporto di strozzamento costante diviene orizzontale. Notare inoltre che il coefficiente di portata di un bocchiglio è solitamente maggiore di 1 a causa del fatto che prediamo la pressione prima della sezione minima del bocchiglio.

porto fra i diametri del diaframma e della condotta nonché dal coefficiente di contrazione di vena  $c_c$ . Quest'ultimo a sua volta è una funzione del regime di moto, cioè del numero di Reynolds. In figura 9.13 illustriamo l'andamento dei coefficienti di riduzione di portata per il caso del diaframma e del bocchiglio. Per ogni rapporto di strozzamento  $(d/D)^2$  esiste un numero di Reynolds critico oltre il quale il coefficiente di portata non dipende più da Reynolds (cioè non dipende dalla portata stessa). Se siamo sicuri di essere in tale campo allora dalla sola conoscenza del rapporto di strozzamento deduciamo la portata in massa. Capita spesso di non essere sicuri. In questi casi il calcolo è iterativo. Infatti non si conosce il numero di Reynolds della corrente. Pertanto occorre ipotizzare un valore di  $c_m$  seguendo una certa curva a strozzamento costante. Con quel  $c_m$  si calcola la portata dunque il numero di Reynolds che, se non coincide con quello del diagramma, ci fa trovare un nuovo  $c_m$  e così via. È interessante notare che il coefficiente di portata può essere maggiore di 1 per i bocchigli. Ciò è dovuto al fatto che la presa di pressione per  $p_1$  è posizionata prima della sezione minima del bocchiglio, mentre nel caso del diaframma essa è proprio subito dopo la restrizione. Per le misure di portata di flussi comprimibili con diaframmi e bocchigli la relazione (9.38) viene modificata con un secondo coefficiente  $\varepsilon$  che tiene conto degli effetti dello strozzamento sulla comprimibilità del fluido. A titolo di esempio in figura 9.14 riportiamo tale coefficiente da impiegarsi nella

$$\dot{m} = \varepsilon c_m \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2\rho(p_0 - p_1)} \quad (9.43)$$

## Venturimetri

Il venturimetro (o tubo di Venturi), come lo chiamò nel 1898 il suo ideatore C. Hershel, è costituito da un convergente che può essere tronco-conico (venturimetro classico) oppure di tipo bocchiglio (venturimetro-bocchiglio) seguito da un divergente tronco-conico avente conicità  $< 30^\circ$  che ha lo scopo di ridurre la perdita di carico idraulico incontrata dal fluido nell'attraversamento dell'apparato di misura. Le prese di pressione sono posizionate a monte dell'imbocco tronco-conico (o a monte del bocchiglio) ed corrispondenza della sezione

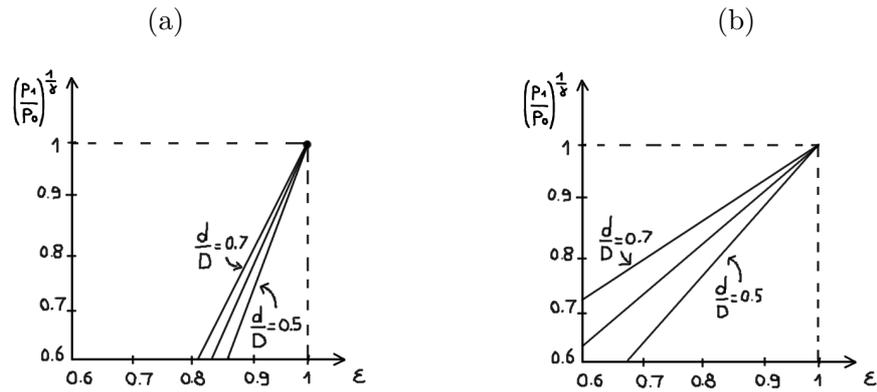


Figura 9.14: Coefficienti di comprimibilità per diaframmi (a) e boccali (b).

minima. Esse possono essere in camera anulare come avviene nel caso dei diaframmi e dei boccali oppure possono essere semplicemente dei fori praticati nella sezione. Tuttavia non è opportuno eseguire semplicemente un foro per misurare la pressione dato che essa non è generalmente uniforme nel perimetro della sezione e le formule analitiche per il calcolo della portata solitamente necessitano di un valor medio di pressione. Per un fluido incomprimibile in assenza di perdite

$$\dot{m} = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2\rho \frac{p_0 - p_1}{1 - (d/D)^4}} \quad (9.44)$$

in cui  $p_0$  e  $p_1$  sono rispettivamente le pressioni prima del tratto tronco conico (diametro  $D$ ) e nella sezione minima (diametro  $d$ ) del venturimetro.

# Capitolo 10

## Gasdinamica

In questo capitolo analizziamo le proprietà di un flusso stazionario, monodimensionale ed isoentropico di un gas perfetto.

### 10.1 Equazioni fondamentali

Indichiamo con  $s$  l'ascissa curvilinea del flusso e consideriamo tutte le proprietà termodinamiche e geometriche come funzione di  $s$ . Fra due ascisse curvilinee  $s$  ed  $s+ds$  infinitamente vicine abbiamo che la dinamica del flusso soddisfa alle seguenti equazioni

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} + \frac{du}{u} = 0 \quad (\text{Equazione di continuità}) \quad (10.1)$$

$$\rho u du = -dp \quad (\text{Equazione di Eulero}) \quad (10.2)$$

$$dh + u du = 0 \quad (\text{Equazione dell'energia}) \quad (10.3)$$

Se si tratta della dinamica di un gas perfetto  $dh = c_p dT$ .

#### 10.1.1 Grandezze di ristagno

Se osserviamo il primo principio della termodinamica (10.3) notiamo che conviene definire una *entalpia di ristagno* o *entalpia totale* come

$$h_t = h + \frac{u^2}{2} \quad (10.4)$$

Dalla (10.3) deduciamo che per un flusso adiabatico e stazionario tale quantità si conserva lungo l'ascissa curvilinea del moto. Il significato fisico dell'entalpia totale è il seguente: se pensiamo di arrestare il fluido attraverso un processo isoentropico (adiabatico e reversibile) l'energia cinetica viene convertita in pressione ed energia interna del fluido a cui corrisponde un certo incremento di entalpia. L'entalpia totale è quell'entalpia che ci troveremmo alla fine di questo ipotetico processo di rallentamento isoentropico. Se consideriamo un gas perfetto, nell'ipotesi in cui  $c_p$  sia costante dalla (10.4) segue che

$$T_t = T + \frac{u^2}{2c_p} \quad (10.5)$$

$M_a$	0.1	0.2	0.3
$\Delta\rho/\rho$	0.005	0.02	0.046

Tabella 10.1: Incremento relativo di densità per un processo ristagno isoentropico di aria.

in cui  $T_t$  denota la temperatura *totale* di *ristagno* del gas, cioè come quella temperatura alla quale si porterebbe il gas se esso fosse rallentato isoentropicamente fino a fermarsi. La temperatura totale può essere espressa in come

$$\begin{aligned} T_t &= T \left( 1 + \frac{u^2}{2Tc_p} \right) \\ &= T \left( 1 + (\gamma - 1) \frac{u^2}{2\gamma RT} \right) \end{aligned} \quad (10.6)$$

essendo<sup>1</sup>  $c_p = \gamma R/(\gamma - 1)$ . Inoltre  $v_s = \gamma RT$  è la velocità del suono<sup>2</sup> nel gas. Pertanto otteniamo

$$\boxed{\frac{T_t}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_a^2} \quad (10.9)$$

Dalla definizione di temperatura totale e di trasformazione isoentropica possiamo ricavare le definizioni di pressione totale e densità totale

$$\frac{p_t}{p} = \left( \frac{T_t}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_a^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (10.10)$$

$$\frac{\rho_t}{\rho} = \left( \frac{T_t}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_a^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (10.11)$$

Dalla seconda equazione possiamo stabilire quali sono i limiti entro i quali è lecito ritenere incompressibile un gas. Infatti a seguito di un fenomeno di ristagno isoentropico la densità subisce una variazione

$$\frac{\rho_t - \rho}{\rho} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_a^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - 1 \quad (10.12)$$

In tabella 10.1 riportiamo i valori degli incrementi relativi di densità per un processo di ristagno isoentropico di aria. Notiamo se il flusso si mantiene sotto  $M_a = 0.2$  possiamo trattare l'aria come un fluido incompressibile commettendo un errore inferiore al 2%. L'equazione (10.10) caratterizza il rapporto fra la pressione di ristagno sulla punta di un tubo di Pitot e quella statica. Poiché in un processo di ristagno adiabatico la temperatura totale

<sup>1</sup>Dalla relazione  $dh = du + d(pv)$  otteniamo  $c_p - c_v = R$ , dunque

$$c_p \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) = R \quad \Rightarrow \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad (10.7)$$

<sup>2</sup>L' espressione della velocità del suono in un fluido perfetto è

$$v_s = \sqrt{\left( \frac{dp}{d\rho} \right)_s} \quad (10.8)$$

Essa si dimostra partendo dall'equazione di Eulero del fluido perfetto cercando di individuare la legge di propagazione di una qualunque perturbazione, velocità densità o pressione. Considerando uno stato di velocità inizialmente irrotazionale, sappiamo che il fluido perfetto permane in moto irrotazionale (teorema di Lagrange). Il potenziale delle velocità di una perturbazione si propaga come una equazione d'onda avente velocità di gruppo (10.8).

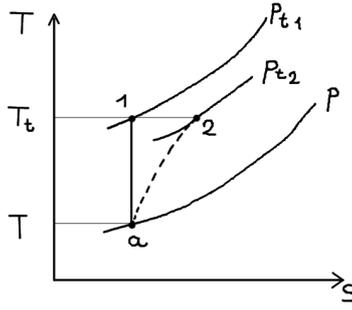


Figura 10.1: In una trasformazione di ristagno adiabatico irreversibile abbiamo la stessa temperatura totale di un ristagno reversibile ma pressione totale e densità totale diverse.

si mantiene costante nelle varie sezioni del flusso, possiamo anche esprimere il rapporto di temperatura statica in funzione del numero di Mach

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{a1}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{a2}^2} \quad (10.13)$$

Se il flusso compie trasformazioni adiabatiche e reversibili allora fra le varie sezioni si conserva anche la pressione e la densità totale. Pertanto possiamo esprimere il rapporto fra le pressioni e le densità statiche come

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{a1}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{a2}^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (10.14)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{a1}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{a2}^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (10.15)$$

## 10.2 Rapporti di pressione, temperatura e densità che corrispondono ad una condizione di moto sonico

Dalle equazioni ottenute per la pressione totale, la temperatura totale e la densità totale è facile calcolarsi quali sono i rapporti di pressione, temperatura e densità che corrispondono a  $M_a = 1$

$$\frac{T_t}{T} = \frac{\gamma+1}{2} \quad \frac{p_t}{p} = \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \frac{\rho_t}{\rho} = \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (10.16)$$

Invertiamo tali relazioni e calcoliamole per l'aria ( $\gamma = 1.4$ )

$$\frac{T}{T_t} = \frac{2}{\gamma+1} = 0.8333 \quad (10.17)$$

$$\frac{p}{p_t} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.5283 \quad (10.18)$$

$$\frac{\rho}{\rho_t} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0.6339 \quad (10.19)$$

In altre parole se la pressione statica raggiunge in una qualche sezione 0.53 volte quella totale, in tale sezione raggiungiamo la velocità del suono.

### 10.3 Portata ridotta in funzione del rapporto di pressione o del numero di Mach

Per definizione di temperatura totale

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{2c_p T_t \left(1 - \frac{T}{T_t}\right)} \\ &= \sqrt{2 \frac{\gamma R}{\gamma - 1} T_t \left(1 - \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} \end{aligned} \quad (10.20)$$

Consideriamo ora la conservazione della portata in massa

$$\dot{m} = \rho S u = \frac{p}{RT} S \sqrt{2 \frac{\gamma R}{\gamma - 1} T_t \left(1 - \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} \quad (10.21)$$

Vogliamo determinare una portata adimensionale (detta *portata ridotta*) che dipende solo dal rapporto di pressione  $p/p_t$ . È facile calcolare che

$$\boxed{\frac{\dot{m} \sqrt{T_t}}{S p_t} = \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)}} \quad (10.22)$$

Cosa ce ne facciamo di questa portata ridotta?. Sappiamo che  $\dot{m}$  è una costante, pertanto dalla precedente equazione se sono note le grandezze totali  $T_t$  e  $p_t$  in una qualunque sezione possiamo facilmente trovare l'andamento della pressione statica noto l'andamento della area. Si può dimostrare, calcolandosi la derivata, che la (10.22) ha un massimo in corrispondenza delle condizioni critiche ( $M_a = 1$ )

$$\frac{p}{p_t} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (10.23)$$

Il valore del massimo è

$$\frac{\dot{m} \sqrt{T_t}}{S^* p_t} = \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (10.24)$$

e per data pressione totale, temperatura totale e portata, si realizza in corrispondenza della sezione di area minima  $S^*$ . Sostituendo nella (10.22) l'espressione del rapporto fra la pressione totale e quella statica in funzione del numero di Mach otteniamo

$$\frac{\dot{m} \sqrt{T_t}}{S p_t} = \sqrt{\frac{\gamma}{R}} M_a \left(\frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_a^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (10.25)$$

Quest'ultima espressione si studia facilmente in funzione di  $M_a$ .

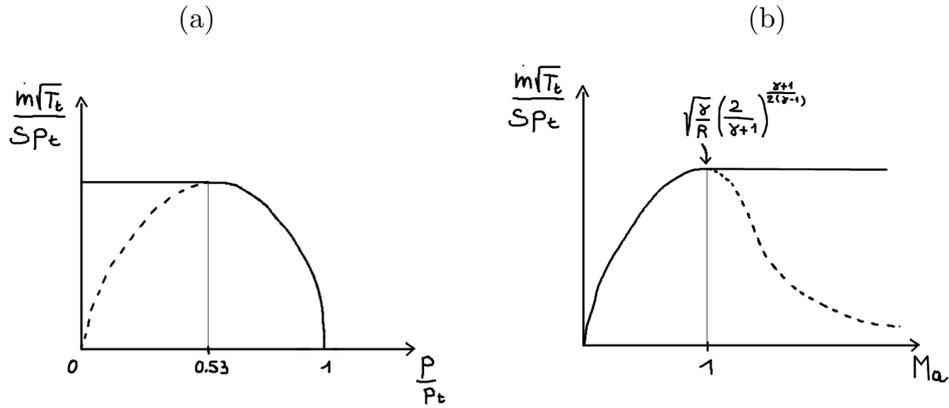


Figura 10.2: Portata ridotta in funzione del rapporto di pressione (a) e del numero di Mach (b). a) e controcorrente (b). La portata ridotta massima viene raggiunta nella sezione di area minima.

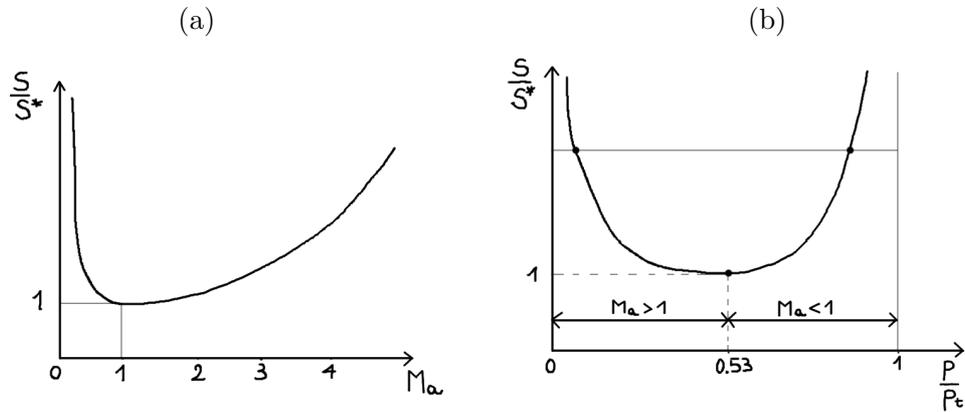


Figura 10.3: Legge delle aree in funzione delle numero di Mach (a) e del rapporto di pressione (b). Notiamo che in questo caso per assegnato rapporto  $S/S^*$  esistono due soli valori del rapporto di pressione che forniscono un andamento isoentropico.

## 10.4 Andamento delle sezioni in funzione di $M_a$ e $p/p_t$

Facendo il rapporto fra (10.24) e (10.25) otteniamo la *legge delle aree*

$$\frac{S}{S^*} = \frac{1}{M_a} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_a^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (10.26)$$

in cui  $S^*$  è la sezione di area minima. Possiamo anche fare il rapporto fra (10.24) e (10.22) per esprimere il rapporto fra le aree in funzione del rapporto di pressione

$$\frac{S}{S^*} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \left( \frac{p}{p_t} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left[ \frac{2}{\gamma-1} \left( 1 - \left( \frac{p}{p_t} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (10.27)$$

Analizzando il grafico di figura 10.3(b) notiamo che per data portata in massa e condizioni totali  $T_t$  e  $p_t$  la teoria isoentropica prevede in una certa sezione due soli valori possibili

di pressione, uno in regime subsonico l'altro in regime supersonico. Questo avviene se da qualche parte il fluido ha raggiunto la velocità del suono.

## 10.5 Variazione delle coordinate termodinamiche nella direzione del moto del fluido

Consideriamo sempre un flusso isentropico localmente monodimensionale e stazionario di un gas perfetto. Studiamo il legame fra le coordinate termodinamiche nella direzione del moto in funzione dell'andamento della sezione. In particolare consideriamo un avanzamento infinitesimo  $ds$  nella direzione del flusso. Lungo una isentropica abbiamo  $dp = u_s^2 d\rho$ , per definizione di velocità del suono, da cui

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{u_s^2} \frac{dp}{\rho} \quad (10.28)$$

Inoltre considerando l'equazione di Eulero  $dp/\rho = -udu$  abbiamo

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M_a^2 \frac{du}{u} \quad (10.29)$$

Utilizzando infine l'equazione di continuità

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{du}{u} - \frac{dS}{S} = 0 \quad (10.30)$$

abbiamo

$$\boxed{\frac{du}{u} = \frac{1}{M_a^2 - 1} \frac{dS}{S}} \quad (10.31)$$

Sostituendo (10.31) in 10.29 otteniamo

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{M_a^2}{M_a^2 - 1} \frac{dS}{S}} \quad (10.32)$$

Dal primo principio della termodinamica  $c_p dT + u du = 0$

$$\frac{1}{u^2} \frac{\gamma RT}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} + \frac{du}{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{T} = -M_a^2 (\gamma - 1) \frac{du}{u} \quad (10.33)$$

pertanto

$$\boxed{\frac{dT}{T} = -\frac{M_a^2 (\gamma - 1)}{M_a^2 - 1} \frac{dS}{S}} \quad (10.34)$$

Sempre dal primo principio della termodinamica in forma meccanica  $dp + \rho u du = 0$

$$\frac{dp}{p} \frac{p}{\rho u^2} + \frac{du}{u} = \frac{dp}{p} \frac{1}{\gamma} \frac{\gamma RT}{u^2} + \frac{du}{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\gamma M_a^2 \frac{du}{u} \quad (10.35)$$

dunque

$$\boxed{\frac{dp}{p} = \frac{\gamma M_a^2}{M_a^2 - 1} \frac{dS}{S}} \quad (10.36)$$

# Capitolo 11

## Termodinamica dei gas reali

Per calcolare le proprietà termodinamiche di un gas reale o di un vapore surriscaldato è sufficiente considerare delle opportune trasformazioni quasi statiche che connettono lo stato di interesse ad un altro stato in cui le proprietà termodinamiche sono note, ed integrare lungo la trasformazione. Di solito si considerano note le proprietà valutate sulla curva limite superiore. Le coordinate termodinamiche  $p, v, T$  sono collegate da una relazione  $f(p, v, t) = 0$  per una sostanza chimicamente omogenea; in particolare ciò è vero se la sostanza è in uno stato monofase. La natura del legame  $f(p, v, t) = 0$  per un gas o un liquido rappresenta un punto di vista macroscopico su fenomeni di interazione molecolari complessi. Utilizzando la meccanica statistica è possibile costruire dei modelli semplificati di interazione multiparametrici. Per fare ciò si considera una Hamiltoniana con dei potenziali che caratterizzano l'interazione fra ogni coppia di molecole. Introducendo tale Hamiltoniana nella funzione di partizione della teoria è possibile risalire alla pressione alla temperatura ed al volume specifico del gas, ed alla relazione che li pone in relazione.

### 11.1 Equazione di Van der Waals

Nel 1873 il fisico danese J. Van der Waals propose la seguente equazione di stato approssimata per descrivere il comportamento di un certo fluido in *tutto* il dominio monofase (liquido e gas)

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad (11.1)$$

L'obbiettivo è quello di mantenere la struttura della semplice equazione del gas perfetto introducendo due costanti  $a$  e  $b$  che rappresentano delle correzioni

- $b$  si dice *covolume* e rappresenta una sorta di misura del volume occupato dalle molecole;
- il termine  $a/v^2$  rappresenta un coefficiente di riduzione della pressione rispetto al caso di gas ideale, coefficiente che pretende di rappresentare delle interazioni molecolari di tipo attrattivo.

I valori delle costanti  $a$  e  $b$  che identificano il modello parametrico di Van der Waals per il comportamento monofase di un fluido non ideale, possono essere determinati sperimentalmente o teoricamente. Chiaramente il modello fornirà delle previsioni in buon accordo con l'esperienza per insiemi di stati non troppo differenti da quelli utilizzati per la determinazione delle costanti. Sono stati proposti due criteri teorici per la determinazione delle

costanti. Il primo criterio si concretizza in un modello *tri-parametrico*, in cui si utilizza il punto di flesso dell'isoterma critica in corrispondenza del punto critico in un diagramma  $pv$  per determinare tre parametri  $a$ ,  $b$  ed  $R$ . In altre parole, oltre ad  $a$  e  $b$  viene determinata anche una costante  $R$  che pertanto non coincide più con la costante del gas ideale  $R_0/m$ . Il secondo criterio forza la condizione  $R^* = R$  e definisce un volume critico convenzionale utilizzando i risultati del primo criterio.

### 11.1.1 Primo criterio per la scelta delle costanti

Note sperimentalmente le coordinate termodinamiche corrispondenti al punto critico si impone che l'equazione di Van der Waals presenti una isoterma critica con flesso orizzontale esattamente in tale punto. Ciò equivale a considerare l'equazione (11.1) nella forma  $p(v, T)$

$$p = \frac{R^*T}{v-b} - \frac{a}{v^2} \quad (11.2)$$

e ad imporre le condizioni

$$p(v_c, T_c) = p_c, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_{v_c, T_c} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right|_{v_c, T_c} = 0 \quad (11.3)$$

Queste condizioni si traducono esplicitamente nelle

$$p_c = \frac{R^*T_c}{v_c-b} - \frac{a}{v_c^2} \quad (11.4)$$

$$0 = -\frac{R^*T_c}{(v_c-b)^2} + 2\frac{a}{v_c^3} \quad (11.5)$$

$$0 = 2\frac{R^*T_c}{(v_c-b)^3} - 6\frac{a}{v_c^4} \quad (11.6)$$

da cui

$$b = \frac{v_c}{3}, \quad a = 3v_c^2 p_c, \quad R^* = \frac{8 p_c v_c}{3 T_c} \quad (11.7)$$

Con tali valori delle costanti si ottiene una equazione di Van der Waals esatta al punto critico ed approssimata in modo soddisfacente in un suo intorno. L'equazione risulta male approssimata in zone prossime al comportamento di gas ideale poiché la costante  $R^*$  è molto diversa da  $R_0/m$ . Infatti

$$\frac{p_c v_c}{R^* T_c} = \frac{3}{8} = 0.375 \quad (11.8)$$

mentre il fattore di comprimibilità critico ha valori generalmente compresi fra 0.23 e 0.31. In ogni caso, qualunque sia la scelta delle costanti l'equazione di Van der Waals vale per sistemi monofase, cioè non può valere nel campo dei vapori saturi. All'interno delle curve limite l'equazione essa può rappresentare al più stati *metastabili* monofase.

### 11.1.2 Secondo criterio per la scelta delle costanti

Nella terza equazione illustrata (11.7) si forza la condizione  $R^* = R$ . Questa condizione definisce implicitamente un volume specifico critico *convenzionale*  $v_c^*$

$$R = \frac{8 p_c v_c^*}{3 T_c} \quad (11.9)$$

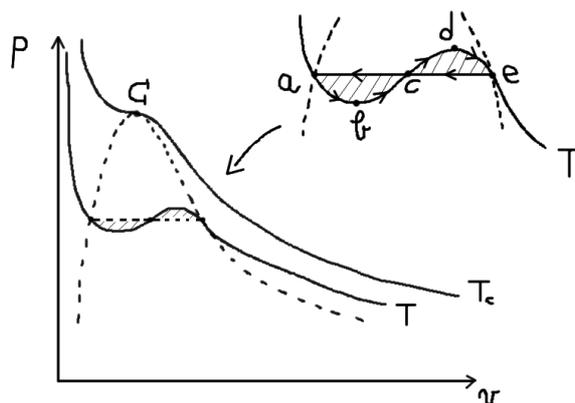


Figura 11.1: Criterio di Maxwell per il tracciamento delle curve limite impiegando l'equazione di Van der Waals. Le aree illustrate in figura sono uguali.

cioè

$$v_c^* = \frac{3}{8} \frac{RT_c}{p_c} = \frac{3}{8} v_c \quad (11.10)$$

Impiegando  $v_c^*$  in luogo di  $v_c$  nelle (11.7) otteniamo

$$a = 3v_c^{*2} p_c = \frac{27}{64} \frac{R^2 T_c^2}{p_c} \quad (11.11)$$

$$b = \frac{v_c^*}{3} = \frac{1}{8} \frac{RT_c}{p_c} \quad (11.12)$$

Con questo criterio di scelta delle costanti l'equazione di Van der Waals rappresenta discretamente il comportamento dei vapori surriscaldati e dei gas reali, eccetto che in un intorno del punto critico.

### 11.1.3 Costruzione delle curve limite secondo il criterio di Maxwell

Consideriamo l'equazione di Van der Waals con il secondo criterio della scelta delle costanti. Vogliamo sostituire ai tratti sinuosi delle isoterme corrispondenti a  $T < T_c$ , dei tratti isobari nel campo dei vapori saturi. Supponiamo di essere in grado di realizzare i stati di equilibrio rappresentati dal tratto sinuoso  $abcde$  illustrato in figura 11.1<sup>1</sup>. Trattandosi di stati di equilibrio non stabile la temperatura  $T$  non è la temperatura termodinamica, essendo quest'ultima definita solo per stati di equilibrio stabili. Identifichiamo il tratto isoterma  $ae$  con la presenza di un serbatoio di calore che si trova alla temperatura dell'isoterma  $abcde$ . Una ipotetica macchina che opera secondo il ciclo  $abcdea$  illustrato in figura 11.1 deve compiere lavoro nullo, poiché essa scambia calore con una sola sorgente a temperatura fissata e compie una trasformazione ciclica. Se il lavoro fosse positivo sarebbe violato il postulato di Kelvin, se il lavoro fosse negativo allora è il ciclo inverso a violare il postulato di Kelvin. Pertanto la curva  $ae$  deve tagliare l'isoterma di Van der Waals in modo tale che le aree racchiuse siano uguali fra loro.

<sup>1</sup>Sperimentalmente sono stati realizzati stati metastabili corrispondenti ai tratti  $ab$  ed  $ed$ , ma nessuno ha ancora osservato stati corrispondenti al tratto  $bcd$ .

## 11.2 Legge degli stati corrispondenti

Se consideriamo una certa equazione di stato valida per una classe di gas reali possiamo evidentemente adimensionalizzare la pressione, la temperatura ed il volume specifico utilizzando le coordinate critiche del gas. Ciò che si ottiene è una equazione adimensionale valida per l'intera classe di gas che seguono quella legge di stato. In particolare se definiamo le coordinate ridotte

$$p_r = \frac{p}{p_c}, \quad T_r = \frac{T}{T_c}, \quad v_r^* = \frac{v}{v_c^*} \quad (11.13)$$

abbiamo una legge adimensionale nella forma

$$f(p_r, T_r, v_r^*) = 0 \quad (11.14)$$

Ad esempio, se riteniamo valida l'equazione di Van der Waals con il secondo criterio di scelta delle costanti, la (11.14) assume la forma

$$\left(p_r + \frac{3}{v_r^{*2}}\right) \left(v_r^* - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}T_r \quad (11.15)$$

La *legge degli stati corrispondenti* dice qualcosa di più, cioè che esiste una equazione di stato adimensionalizzata che *assume la stessa forma qualunque sia il gas reale che stiamo considerando*. Chiaramente il problema che si pone è quello di individuare la forma di questa equazione adimensionale. Partendo dal modello a gas perfetto notiamo che conviene definire un numero puro, detto *fattore di compressibilità* tale che

$$z = \frac{pv}{RT} \quad (11.16)$$

In tal modo il comportamento a gas ideale viene raggiunto asintoticamente se  $z \rightarrow 1$ . Chiaramente la reale forma dell'equazione di stato è nascosta dietro a  $z$ , che *approssimativamente* risulta essere una funzione *universale*<sup>2</sup> della temperatura ridotta e della pressione ridotta. Infatti

$$z = \frac{p_c v_c^* v_r^* p_r}{RT_r T_c} = \frac{3 p_r v_r^*}{8 T_r} \quad (11.17)$$

In altre parole se è valida la legge degli stati corrispondenti, cioè se esiste una legge di stato  $v_r^*(T_r, p_r)$  che in forma adimensionale è la stessa per tutti i gas, allora il fattore di compressibilità dipende solo dalla pressione ridotta e dalla temperatura ridotta ed ha lo stesso andamento per tutti i gas. Pertanto se riteniamo valida la legge degli stati corrispondenti possiamo determinare, eventualmente per via sperimentale, il grafico del fattore di compressibilità eseguendo delle misurazioni su un *qualunque* gas. In tale grafico oltre alle curve a temperatura ridotta costante si riportano anche le curve a volume specifico ridotto *convenzionale* costante

$$v_r^{*'} = \frac{3}{8} \frac{v}{v_c^*} = \frac{v}{v_c} \quad (11.18)$$

---

<sup>2</sup>Se tutti i gas avessero lo stesso potenziale di interazione è chiaro che potremmo scalare opportunamente tale legge di interazione ottenendo una legge di stato universale, valida cioè per tutti i gas. In effetti la stessa equazione di stato di un gas rappresenta una forma macroscopica di effetti microscopici di interazione. È chiaro che gas diversi hanno strutture molecolari differenti e meccanismi di interazione differenti. Tale interazione tuttavia è abbastanza simile per tutti i gas. Questo è il motivo per cui esiste una *legge degli stati corrispondenti* che è approssimativamente verificata per tutti i gas. Si potrebbe anche porre un'altra domanda: perché tutti i gas a bassa pressione seguono la stessa legge  $pv = RT$ ?

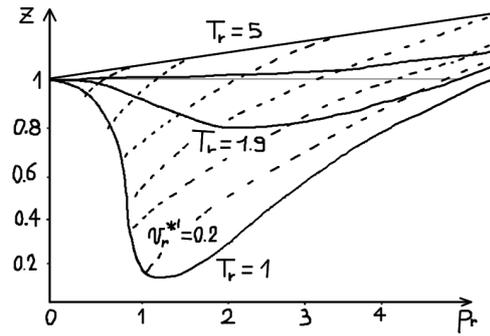


Figura 11.2: Diagramma del fattore di compressibilità  $z(p_r, T_r)$ . Nel grafico sono tracciate anche le curve a volume specifico ridotto convenzionale (11.18).

### 11.3 Entalpia ed energia interna di un gas reale

Per un gas ideale l'esperienza di Joule-Mayer suggerisce che l'energia interna e l'entalpia del gas sono esclusivamente funzioni della temperatura termodinamica. Per un gas reale ciò non è più vero. In particolare, ricordiamo che l'energia interna e l'entalpia sono delle funzioni di stato che nel caso generale evolvono secondo le equazioni di energia determinate nella sezione §2.3.4

$$de = c_v dT + \left[ T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] dv \quad (\text{prima eq. di energia}) \quad (11.19)$$

$$dh = c_p dT + \left[ v - T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp \quad (\text{seconda eq. di energia}) \quad (11.20)$$

Se consideriamo una trasformazione isoterma abbiamo

$$\left. \frac{de}{dv} \right|_T = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \quad (11.21)$$

$$\left. \frac{dh}{dp} \right|_T = v - T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (11.22)$$

Evidentemente se riusciamo a calcolarci le variazioni di energia interna e di entalpia lungo una isoterma possiamo caratterizzare qual'è la deviazione del gas reale rispetto al comportamento del gas ideale che si trova alla stessa temperatura (per cui vale  $de = c_v dT$  e  $dh = c_p dT$ ). Riteniamo valida la legge degli stati corrispondenti e consideriamo l'equazione di stato del gas reale nella forma

$$pv = z(p_r, T_r) RT \quad (11.23)$$

da essa

$$p = z \frac{RT}{v}, \quad \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \frac{RT}{v} \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_v + z \frac{R}{v} \quad (11.24)$$

$$v = z \frac{RT}{p}, \quad \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{RT}{p} \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_p + z \frac{R}{p} \quad (11.25)$$

Sostituendo (11.24) e (11.25) nelle (11.21) e (11.22) ed eseguendo l'integrazione da uno stato di gas ideale per cui  $v \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$  ad uno stato di gas reale otteniamo

$$e = e_{\text{id}} + RT^2 \int_{\infty}^v \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_v \frac{dv}{v} \quad (11.26)$$

$$h = h_{\text{id}} - RT^2 \int_0^p \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_p \frac{dp}{p} \quad (11.27)$$

Poiché il fattore di compressibilità è normalmente espresso in funzione delle coordinate ridotte, conviene trasformare le espressioni (11.26) e (11.27) in forma adimensionale. Otteniamo

$$h = h_{\text{id}} - \frac{R_0}{m} T_c^2 T_r^2 \int_0^{p_r} \frac{1}{T_c} \left( \frac{\partial z}{\partial T_r} \right)_{p_r} \frac{dp_r}{p_r} \quad (11.28)$$

dalla quale, indicando con il pedice "m" l'entalpia molare

$$\boxed{\frac{h_{\text{id},m} - h_m}{T_c} = R_0 T_r^2 \int_0^{p_r} \left( \frac{\partial z}{\partial T_r} \right)_{p_r} \frac{dp_r}{p_r}} \quad (11.29)$$

Analogamente, considerando il volume specifico ridotto convenzionale come variabile di adimensionalizzazione, otteniamo per l'energia interna (11.26) (invertendo gli estremi di integrazione)

$$e = e_{\text{id}} - \frac{R_0}{m} T_c^2 T_r^2 \int_{v_r^{*'}}^{\infty} \frac{1}{T_c} \left( \frac{\partial z}{\partial T_r} \right)_{v_r} \frac{dv_r^{*'}}{v_r^{*'}} \quad (11.30)$$

dalla quale

$$\boxed{\frac{e_{\text{id},m} - e_m}{T_c} = R_0 T_r^2 \int_{v_r^{*'}}^{\infty} \left( \frac{\partial z}{\partial T_r} \right)_{v_r} \frac{dv_r^{*'}}{v_r^{*'}}} \quad (11.31)$$

Notiamo che l'entalpia e l'energia interna di un gas reale ad una certa pressione e temperatura sono generalmente minori di quelle del corrispondente gas ideale alla stessa temperatura. Le relazioni (11.29) e (11.31) sono riportate spesso in forma grafica in funzione di  $T_r$ ,  $p_r$  e  $v_r^{*'}$ . Se è nota l'entalpia, probabilmente è più comodo calcolarsi l'energia interna del gas direttamente utilizzando la formula  $h = u + pv$ .

## 11.4 Entropia

Per calcolare l'entropia di un gas reale consideriamo l'equazione di entropia

$$ds(T, p) = \frac{c_p}{T} dT - \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp \quad (11.32)$$

e valutiamone l'incremento lungo una isoterma da uno stato di gas ideale  $p \rightarrow 0$  ad uno di gas reale. Utilizzando (11.25) troviamo

$$s(T, p) = s(T, 0) - R \int_0^p \left[ T \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_p + z \right] \frac{dp}{p} \quad (11.33)$$

Vogliamo trovare una espressione che caratterizzi la differenza di entropia di un gas reale da uno ideale alla stessa pressione e temperatura. A tal fine osserviamo che per un gas ideale abbiamo  $z = 1$  e  $\partial z / \partial T \equiv 0$ , dunque otteniamo la variazione di entropia lungo una isoterma da una pressione 0 ad una pressione  $p$  è

$$s_{\text{id}}(T, p) = s_{\text{id}}(T, 0) - R \int_0^p \frac{dp}{p} \quad (11.34)$$

Sottraendo (11.34) da (11.33) e notando che  $s_{\text{id}}(T, 0) \equiv s(T, 0)$  troviamo

$$s(T, p) - s_{\text{id}}(T, p) = -R \int_0^p \left[ T \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_p + (z - 1) \right] \frac{dp}{p} \quad (11.35)$$

che equivale a

$$\boxed{s_{\text{id},m}(T, p) - s_m(T, p) = R_0 \int_0^{p_r} \left[ T_r \left( \frac{\partial z}{\partial T_r} \right)_{p_r} + (z - 1) \right] \frac{dp_r}{p_r}} \quad (11.36)$$

Quest'ultima espressione è solitamente graficata in funzione della pressione ridotta per vari valori di temperatura ridotta.

## 11.5 Equazione viriale

Utilizzando la meccanica statistica è possibile mostrare che l'equazione di ogni gas può essere posta nella forma

$$\frac{pv}{RT} = 1 + \sum_k \frac{A_k(T)}{v^k} \quad (11.37)$$

## Capitolo 12

# Impianti frigoriferi

Le tipologie più comuni sono quelle monostadio a compressione secca o ad assorbimento senza corpo separatore. Nell'industria trovano applicazione anche soluzioni multistadio in grado di raggiungere temperatura molto basse, mantenendo una buona efficienza energetica. La scelta di una tipologia di impianto dipende dalle specifiche di progetto, ed in questo capitolo analizziamo le soluzioni più comuni adottate nella pratica.

### 12.1 Fluidi frigoriferi

In natura vi sono gas che possono essere liquefatti a temperatura ambiente ed pressioni non troppo lontane da quella atmosferica (ad esempio  $8 \div 10$  bar). Alcuni esempi sono l'ammoniaca ( $NH_3$ ), vari idrocarburi o miscele di idrocarburi quali il GPL (gas di petrolio liquido). Se mi procuro una bottiglietta ben tappata che contiene un miscuglio di liquido vapore di tali sostanze e ci attacco una serpentina con una valvola noto che ad una apertura della valvola corrisponde un congelamento della stessa, soprattutto se il tubo va a pescare dal fondo della bottiglia dove c'è liquido. Se poi la serpentina è sagomata secondo un profilo convergente allora ad un certo punto del tubo vedrò comparire della brina. In tale punto si è raggiunta la temperatura di rugiada dell'aria umida. Con questo sistema (bottiglia + valvola) in pratica sono riuscito a trasformare lavoro meccanico di compressione del gas in freddo. Quando è finito il liquido dentro alla boccetta mi tocca prendere dell'altro gas, comprimerlo in un'altra bottiglietta fino alla pressione di liquefazione e stapparla piano piano quando fuori fa caldo.

Durante un rifornimento mal riuscito ad una stazione di GPL il signor Rossi la primavera scorsa notò che il tappo del serbatoio della sua macchina si era congelato e pensò di avere avuto una grande idea per l'estate: usare il GPL compresso in tante bottigliette per produrre freddo, stappandosene una tutte le volte che la calura estiva lo opprime. Perciò ha pensato di procurarsi un sacco di bottigliette vuote e di comprimerci dentro del GPL fino a raggiungere uno stato liquido saturo. L'ha chiamata la sua riserva di freddo per l'estate. Ha pure pensato di ottimizzare il processo di compressione, realizzandolo la notte, quando non lavora. Il signor Rossi si è acceso come un fiammifero alla terza bottiglia che ha provato ad aprire. Il fluido frigorifero non era quello giusto anche se le proprietà termofisiche erano buone.

In effetti l'ostacolo maggiore all'utilizzo di idrocarburi come fluidi frigoriferi è dovuto alla loro elevata infiammabilità, cosa che può generare forte pericolo qualora il fluido venga perso dall'impianto in ambienti chiusi (di norma questi fluidi hanno densità maggiore

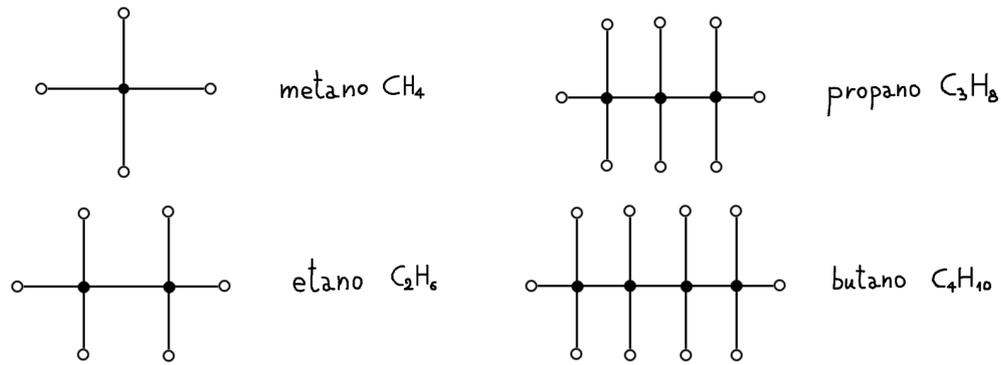


Figura 12.1: Idrocarburi leggeri della serie paraffinica. Si tratta di idrocarburi in catena semplice in cui la valenza di ogni carbonio ( $\bullet$ ) è completamente utilizzata nella combinazione per mezzo di legami semplici con altri atomi di carbonio e atomi di idrogeno ( $\circ$ ). Pertanto si dicono anche idrocarburi *saturi*.

dell'aria e si stratificano a terra, accumulandosi). Inizialmente la tecnologia del freddo faceva grande utilizzo di fluidi frigoriferi *naturali* quali ammoniaca (usata molto anche oggi in impianti a compressione secca ad assorbimento) e vari idrocarburi.

I primi fluidi frigoriferi di sintesi sono stati introdotti nella tecnica del freddo negli anni 30. Essi possono essere derivati da idrocarburi leggeri (metano  $CH_4$ , etano  $C_2H_6$ , propano  $C_3H_8$ ) per sostituzione parziale o totale degli atomi di idrogeno con cloro e/o fluoro. Dipendentemente dal tipo di sostituzione possiamo avere

- CFC (*clorofluorocarburi*). Tutti gli atomi di idrogeno sono stati sostituiti da cloro e fluoro.
- HCFC (*idroclorofluorocarburi*). Non tutti gli atomi di idrogeno sono stati sostituiti. Il cloro ed fluoro prendono il posto di alcuni idrogeni.
- HFC (*idrofluorocarburi*). Solo il fluoro sostituisce parzialmente gli atomi di idrogeno.

### 12.1.1 Denominazione standard (ASHRAE-1992) dei fluidi frigoriferi

La composizione chimica di un fluido frigorifero è stata normalizzata dalla normativa ANSI/ASHRAE 34-1992. Secondo tale normativa un certo fluido è identificato dalla lettera  $R$  seguita da 3 numeri<sup>1</sup>  $X$ ,  $Y$  e  $Z$

$$N_C = X + 1; \tag{12.1}$$

$$N_H = Y - 1; \tag{12.2}$$

$$N_F = Z \tag{12.3}$$

Infine si aggiungono tanti atomi di cloro per fare tornare la valenza, cioè

$$N_{Cl} = 5 + 2X - Y - Z \tag{12.4}$$

<sup>1</sup>Nel caso in cui vi siano solo 2 numeri si assume che quelli che precedono siano 0. Ad esempio  $R22 = R022$ .

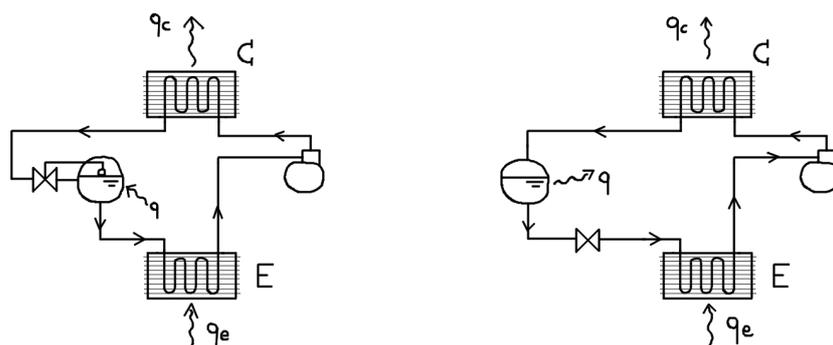


Figura 12.2: Circuito elementare di un impianto frigorifero monostadio a compressione secca e corpo separatore. Mettere la valvola di laminazione dopo il corpo separatore (schema di destra) a parità di pressioni di lavoro riduce l'effetto frigorifero poichè diminuisce il calore prelevabile dall'evaporatore a parità di lavoro di compressione. C'è anche da dire che se si mette il corpo separatore prima della valvola di laminazione non si hanno apprezzabili entrate termiche nel corpo stesso. Quindi se il corpo separatore è ben coibentato conviene metterlo dopo alla valvola di laminazione. Ciò è particolarmente utile se si ha un impianto centralizzato, in cui al corpo separatore mantenuto a bassa temperatura sono attaccati tubi di mandata e ritorno di più utenze.

Ad esempio,



I derivati dell'etano ( $H_3C - CH_3$ ) e del propano ( $H_3C - CH_2 - CH_3$ ) ammettono degli *isomeri* cioè composti chimici aventi stessa formula chimica ma struttura differente. Si introduce la lettera *a* per indicare la molecola con struttura più asimmetrica. Così l'idrofluorocarburo *R134a* derivato dall'etano ha una molecola con struttura più asimmetrica suo parente *R134* pur avendo la medesima formula bruta ( $C_2H_2F_4$ ).

## 12.2 Impianti monostadio a compressione secca

Il ciclo di Carnot inverso non può essere assunto quale riferimento di impianti frigoriferi effettivamente realizzabili nella pratica. Anzitutto l'espansore non trova applicazione pratica dovendo trattare un fluido bifase ad elevato contenuto di liquido. Inoltre sarebbe possibile recuperare solo una modesta frazione del lavoro impiegato per la compressione. Si preferisce pertanto sostituire l'espansore con un organo di laminazione (valvola, rubinetto, tubo capillare, ecc...). Conviene poi evitare la compressione nella zona del vapore saturo umido in particolare se si utilizzano dei compressori volumetrici alternativi. In questo caso insorge il pericolo della rottura della testata del compressore per *colpo di liquido*, in quanto la fase liquida (approssimativamente incomprimibile) tende ad accumularsi nel volume nocivo del compressore<sup>2</sup>. Si preferisce pertanto prolungare l'evaporazione del fluido

<sup>2</sup>Quando la fase liquida occupa un epsilon in più del volume nocivo del compressore alla corsa successiva dello stantuffo la pressione agente sulla testa del compressore diviene inaccettabile e potrebbe portare alla rottura della testata o manovellismo di spinta (biella-manovella-coppie cinematiche).

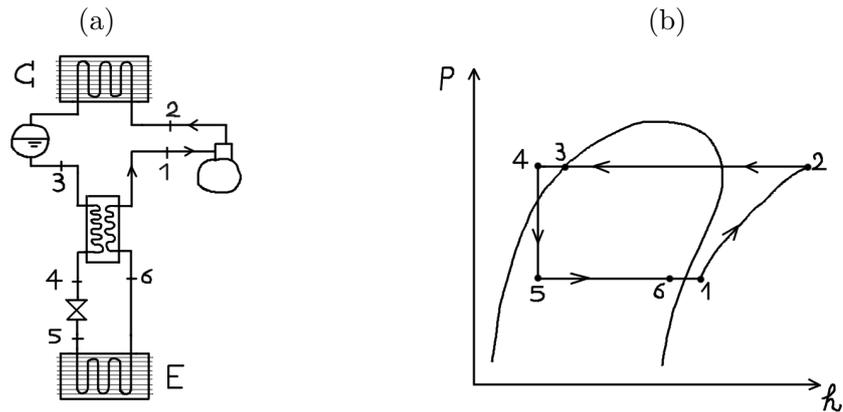


Figura 12.3: Possibile miglioramento del circuito elementare mediante scambiatore rigenerativo che realizza un sottoraffreddamento del liquido in uscita del condensatore ed un surriscaldamento del vapore in uscita dell'evaporatore.

frigorifero fino ad ottenere un vapore saturo secco, o meglio, leggermente surriscaldato in uscita dall'evaporatore. A compressione avvenuta il fluido entra nel condensatore in uno stato di vapore, che dapprima viene desurriscaldato e successivamente condensato lungo una trasformazione idealmente isobara. È possibile realizzare un sottoraffreddamento del liquido ed un surriscaldamento del vapore introducendo uno scambiatore rigenerativo come illustrato nella figura 12.3. Chiaramente  $q_{34} = q_{61}$ . Alternativamente possiamo inserire una valvola di laminazione a controllo termostatico (controllata dalla temperatura di uscita dell'evaporatore), in modo tale che il  $\Delta p$  dell'impianto sia tale da avere un vapore leggermente surriscaldato in ingresso al compressore.

Il ciclo frigorifero reale a compressione secca monostadio differisce da quello ideale mostrato in figura 12.3, principalmente per due motivi. Anzitutto la compressione non è isoentropica, ma è schematizzabile come una trasformazione adiabatica ed irreversibile. In secondo luogo vi sono delle perdite di carico idraulico in tutti gli elementi dell'impianto, in particolare nel condensatore, nell'evaporatore e nelle tubazioni di raccordo fra le varie apparecchiature (ad esempio fra il compressore ed il condensatore).

### 12.3 Impianti multistadio a compressione secca

Vi sono impianti frigoriferi industriali (ad esempio quelli impiegati nelle celle frigorifere) funzionanti a temperature molto basse (fra  $-20^\circ\text{C}$  e  $-50^\circ\text{C}$ ). Per realizzare un ciclo frigorifero in grado di operare fra  $-30^\circ\text{C}$  (evaporatore) e  $40^\circ\text{C}$  (condensatore) è necessario poter disporre di un compressore in grado di realizzare elevati rapporti di compressione, talvolta così elevati da non essere proponibili in un sistema a compressione monostadio. Si richiede pertanto un impianto a compressione multistadio che, come vedremo, oltre a risolvere il problema del rapporto di compressione fornisce soluzioni interessanti operative di risparmio energetico e gestione del freddo. Un esempio di sistema multistadio con due evaporatori potrebbe essere impiegato ad esempio in una industria che produce gelato in cui un evaporatore opera a  $-40^\circ\text{C}$  per fare indurire il gelato, l'altro a  $2^\circ\text{C}$  per raffreddare il latte. I compressori multistadio degli impianti frigoriferi possono essere dei compressori volumetrici alternativi, dei compressori dinamici di tipo centrifugo (in cui è semplice

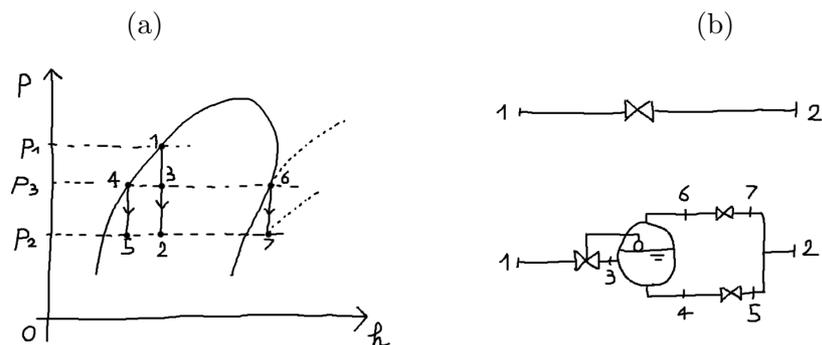


Figura 12.4: Analisi del processo di laminazione isoentalpica dalla pressione  $p_1$  alla pressione  $p_2$ .

realizzare spillamenti fra uno stadio e l'altro) oppure dei compressori a vite. La compressione multistadio oltre che risolvere il problema del rapporto di compressione<sup>3</sup> offre anche l'opportunità di impiegare due processi chiave di *risparmio energetico* ovvero

- la rimozione del “flash gas”;
- la compressione interrefrigerata.

Negli impianti a doppio stadio queste soluzioni sono entrambe adottate al fine di ottimizzare l'effetto frigorifero. Infatti a parità di calore prelevato all'evaporatore, procedere con una compressione interrefrigerata e rimuovere il “flash gas” si traduce in una riduzione del lavoro di compressione, dunque in un aumento dell'effetto frigorifero. Nella figura 12.5 illustriamo uno schema di impianto frigorifero a doppio stadio in cui vi è un corpo separatore per la distribuzione del freddo a più utenze attraverso tubi di mandata e ritorno.

### 12.3.1 Rimozione del “flash gas”

Analizziamo il processo di espansione del liquido saturo in uscita dal condensatore, dallo stato 1 allo stato 2. Se la valvola di laminazione impone differenze di pressione elevate, a fine espansione (punto 2) abbiamo una frazione di vapore abbastanza elevata. Lo stato 2 può essere raggiunto anche interrompendo l'espansione in 3 (ad una arbitraria pressione fra 1 e 2) attraverso una laminazione ridotta che manda il fluido in un separatore di liquido e successivamente espandendo separatamente liquido saturo e vapore saturo fino alla pressione  $p_2$ . Poiché tutti i processi di espansione sono isoentalpici ed il sistema è complessivamente adiabatico, dal miscelamento di 7 e 5 otteniamo esattamente 2 (vd. figura 12.4). La laminazione 6 – 7 è responsabile di una perdita di efficienza del ciclo. Infatti si tratta di gas surriscaldato che arriva al compressore e deve essere ricompresso fino alla pressione 1 senza che esso abbia contribuito a sottrarre calore nell'evaporatore. Possiamo ripetere la stessa costruzione utilizzando molti livelli di pressione. L'effetto frigorifero cresce in modo monotono con il numero di livelli di pressione ed esso si avvicina ad un ciclo di Carnot ottenuto dalla sovrapposizione di infiniti cicli elementari di Carnot operanti fra temperatura differenti.

<sup>3</sup>Questo problema non è particolarmente avvertito nei compressori a vite, in grado di realizzare rapporti di compressione intorno a 20, anche se con rendimenti bassi ad elevati rapporti di compressione.

### 12.3.2 Compressione interrefrigerata

Come accade normalmente nei sistemi di compressione multistadio, se si realizza una interrefrigerazione fra i vari stadi di compressione il lavoro di compressione si riduce. Infatti comprimere un gas freddo è generalmente più facile che comprimerne uno caldo a parità di pressione iniziale e rapporto di compressione. Ciò può essere dedotto molto semplicemente per una compressione politropica

$$l = - \int_1^2 v dp = -p_1^{1/n} v_1 \int_1^2 p^{-1/n} dp = -\frac{n}{n-1} p_1^{1/n} v_1^n \left[ p_2^{\frac{n-1}{n}} - p_1^{\frac{n-1}{n}} \right] \quad (12.7)$$

in cui l'esponente  $n$  caratterizza il grado di irreversibilità della trasformazione (adiabatica ed irreversibile). Raccogliendo<sup>4</sup>  $-p_1^{(n-1)/n}$

$$l = \frac{n}{n-1} p_1 v_1 \left[ 1 - \beta^{\frac{n-1}{n}} \right] = \frac{n}{n-1} RT_1 \left[ 1 - \beta^{\frac{n-1}{n}} \right] \quad (12.9)$$

A parità di pressione iniziale  $p_1$  e di rapporto di compressione  $\beta$  si nota che il lavoro di compressione specifico è proporzionale alla temperatura iniziale del gas  $T_1$ . Per la compressione multistadio abbiamo  $\beta_3 = \beta_2 \beta_1$ . Fissati  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  e  $T_1$ , abbiamo il lavoro complessivo

$$l = l_1 + l_2 \quad (12.10)$$

Attraverso la interrefrigerazione riduciamo la temperatura  $T_2$  dunque il lavoro  $l_2$  necessario a portare il gas alla pressione dalla pressione  $p_2$  alla pressione  $p_3$ . Pertanto minimizziamo la somma  $l_1 + l_2$  minimizzando  $l_2$ . Un altro parametro fondamentale da scegliere è la pressione di interrefrigerazione. Nel caso in cui si consideri un compressore a due stadi di un gas perfetto, come vedremo si dimostra che la pressione ottimale alla quale effettuare l'interrefrigerazione è  $p_{ott} = \sqrt{p_1 p_3}$ . In questo caso il lavoro di compressione è minimo. La scelta della pressione ottimale di interrefrigerazione si inquadra nel contesto dell'ottimizzazione del ciclo. In generale l'ottimizzazione dell'impianto è un problema multiparametrico, e può avere *diverse* funzioni obiettivo. In particolare possiamo pensare di ottimizzare l'effetto frigorifero in funzione della pressione di interrefrigerazione, oppure possiamo massimizzare il calore scambiato all'evaporatore.

### 12.3.3 Schema di impianto frigorifero a doppio stadio di compressione

In figura 12.5 mostriamo lo schema base (senza valvole di intercettazione e altri elementi sicuramente necessari ad una realizzazione pratica dell'impianto) di un impianto frigorifero a doppio stadio di compressione, con corpo separatore per l'eliminazione del "flash gas" e compressione interrefrigerata. Nello schema di figura 12.5, i due compressor sono fisicamente separati, ma questa non è una regola. Infatti il corpo separatore  $C_1$  che realizza l'interrefrigerazione potrebbe essere interposto fra due stadi di un compressore centrifugo in cui si è realizzato uno spillamento dopo un certo numero di giranti. Lo schema può essere modificato (complicandolo) introducendo altri elementi che ne migliorano il funzionamento. Ad esempio, al fine di garantire vapore surriscaldato in ingresso ad entrambi

<sup>4</sup>L'espressione del lavoro di compressione si ricava molto semplicemente considerando il caso di un gas perfetto

$$l_c = h_1 - h_2 = c_p(T_1 - T_2) = \frac{\gamma}{\gamma-1} RT_1 \left( 1 - \beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) \quad (12.8)$$

e sostituendo  $\gamma$  con  $n$ .

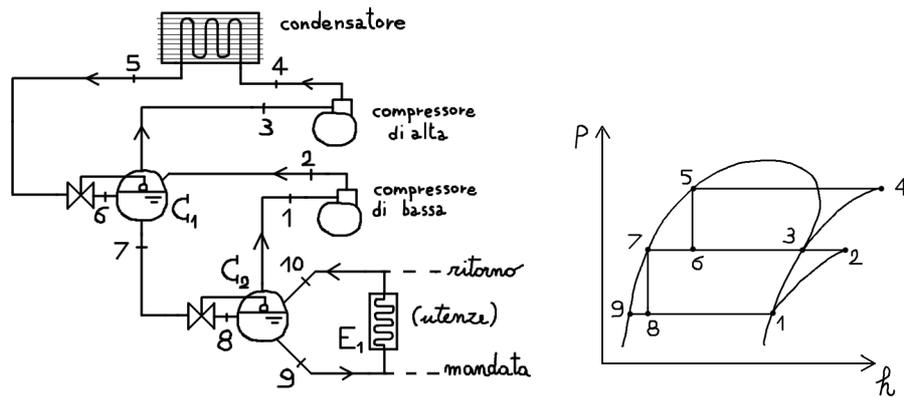


Figura 12.5: Schema di impianto frigorifero a doppio stadio di compressione con rimozione del “flash gas”, interraffreddamento nel corpo separatore  $C_1$  e serbatoio di raccolta  $C_2$  per permettere l’allacciamento di più utenze utilizzando tubi di mandata e ritorno.

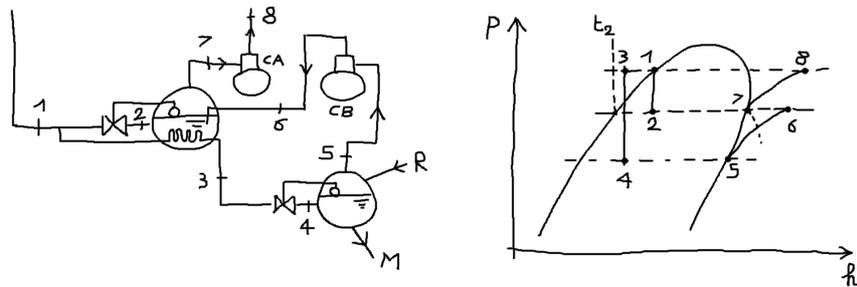


Figura 12.6: Scambiatore utilizzato per ottenere un sottoraffreddamento del liquido prima della valvola di laminazione di bassa pressione. Con un analogo stratagemma si può preriscaldare il fluido frigorifero prima che esso raggiunga il compressore di bassa  $CB$ .

compressori del multistadio (o al singolo compressore del monostadio) è possibile inserire scambiatori rigenerativi che utilizzano parte del calore in uscita dal condensatore per surriscaldare, a pressione costante il fluido in ingresso ad entrambi i compressori. È possibile modificare lo schema del separatore di flash gas introducendo un secondo scambiatore per sottoraffreddare il fluido all’uscita del condensatore prima della valvola di laminazione di bassa pressione, come illustrato in figura 12.6. Con lo stesso sistema è possibile surriscaldare il vapore di ritorno dalle utenze prima che sia inviato al compressore di bassa pressione. Nel caso si utilizzino dei compressori a vite, occorre introdurre un separatore di olio dopo il compressore poiché il fluido frigorifero viene in contatto diretto con l’olio di lubrificazione delle viti. Inoltre occorre controllare bene il livello di fluido frigorifero dato che esso ha spesso forte tendenza a sciogliersi nell’olio.

## 12.4 Impianti frigoriferi a gas

Il circuito elementare di un impianto frigorifero a gas è costituito da un ciclo inverso di Brayton-Joule. Il fluido frigorifero più comune è l’aria, anche se vi sono applicazioni in

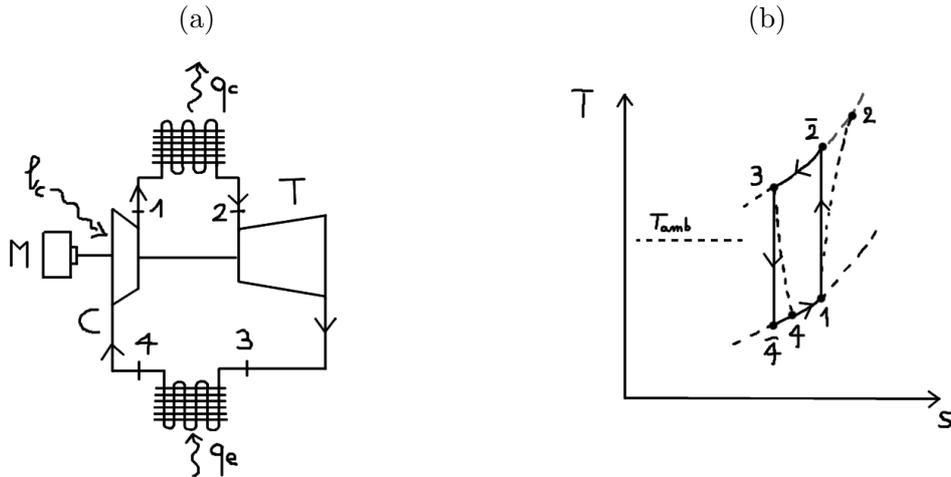


Figura 12.7: (a) Impianto frigorifero a gas. (b) Ciclo termodinamico.

circuito chiuso con fluidi speciali. Lo schema di impianto e le relative trasformazioni per il caso ideale sono rappresentate in figura 12.7. I processi di scambio di calore all'evaporatore ed al condensatore sono approssimativamente isobari. Trattandosi di gas pertanto tali processi non sono isotermi. I calcoli per la determinazione dell'effetto frigorifero del ciclo ideale sono molto semplici. Infatti il lavoro di compressione ideale è

$$l_c = h_2 - h_1 = c_p T_1 \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = c_p T_1 \left( \beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \quad \beta = \frac{p_2}{p_1} \quad (12.11)$$

Il lavoro di espansione ideale è

$$l_t = h_3 - h_4 = c_p T_4 \left( \frac{T_3}{T_4} - 1 \right) = c_p T_4 \left( \beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \quad (12.12)$$

mentre il calore scambiato a pressione costante nell'evaporatore è

$$q_e = c_p (T_1 - T_4) \quad (12.13)$$

Alla fine dei conti otteniamo l'effetto frigorifero del ciclo ideale

$$\epsilon = \frac{q_e}{l_c - l_t} = \frac{h_1 - h_4}{(h_2 - h_1) - (h_3 - h_4)} = \frac{c_p (T_1 - T_4)}{c_p (T_1 - T_4) \left( \beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)} = \frac{1}{\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1} \quad (12.14)$$

che è crescente per  $\beta$  decrescente. Quindi il lavoro del motore  $M$  viene impiegato al meglio se il ciclo realizza un rapporto di compressione tendenzialmente piccolo, compatibilmente con le temperature delle sorgenti con cui si intende scambiare calore. Per studiare il caso non ideale possiamo introdurre dei rendimenti rispetto al caso isoentropico.

## 12.5 Impianti frigoriferi ad assorbimento a singolo effetto

Sono macchine che operano alimentate da energia termica e che impiegano opportune miscele di fluidi per realizzare il ciclo. La più utilizzata è acqua (solvente) e bromuro di

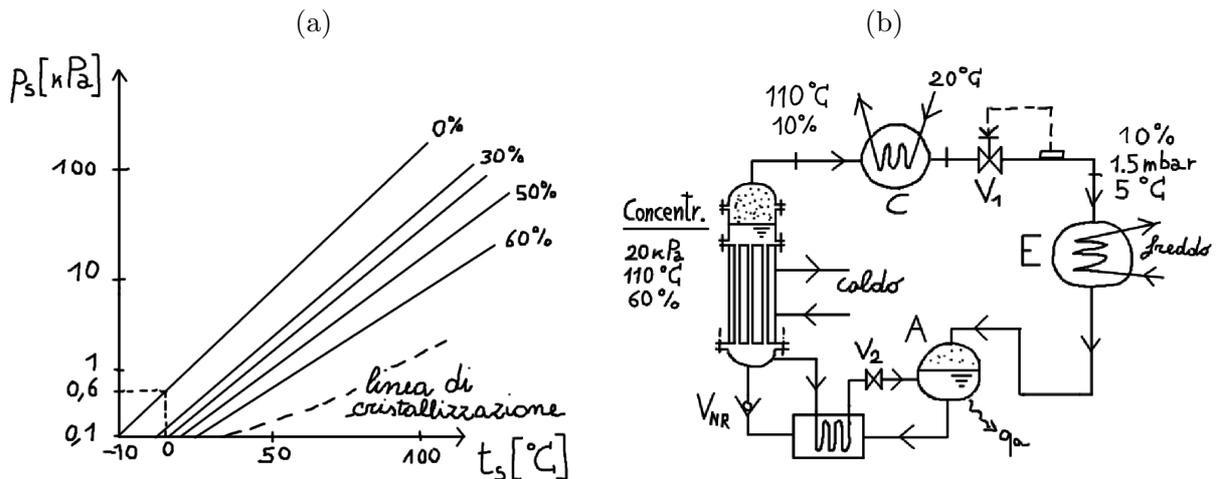


Figura 12.8: (a) Relazione fra la pressione di saturazione e la temperatura di saturazione di una miscela acqua-bromuro di litio. (b) Schema di un ciclo ad assorbimento a singolo effetto.

litio (soluto)<sup>5</sup>. Sottolineiamo fin d'ora che tale miscele vengono utilizzate principalmente per innalzare la temperatura di vaporizzazione ad una certa pressione che di norma è relativamente bassa (0.2 bar). L'idea di base può comunque essere realizzata teoricamente anche con un fluido puro.

Il bromuro di litio (LiBr) è un sale assai simile al comune sale da cucina (cloruro di sodio - NaCl). Una soluzione concentrata di acqua e bromuro di litio ha il grosso vantaggio di essere caratterizzata da una bassa pressione di saturazione anche a temperature relativamente alte. In figura 12.8 riportiamo la pressione di saturazione di una miscela acqua-bromuro di litio. Il ciclo ad assorbimento opera in condizioni di forte depressione dato che il fluido frigorifero è sostanzialmente un miscela di acqua e bromuro di litio in grado di raggiungere temperature di saturazione comprese fra  $0 \div 10^\circ\text{C}$  solo a pressioni fra  $1 \div 5 \text{ mbar}$ <sup>6</sup>. Lo schema dell'impianto, in cui è stato inserito anche uno scambiatore rigenerativo<sup>7</sup> per migliorare l'efficienza del sistema, è quello di figura 12.8(b).

A sinistra troviamo il concentratore di soluzione che può essere costituito da un singolo elemento o da più elementi in serie. L'energia viene fornita al vaporizzatore del concentratore sotto forma di gas caldi provenienti da una combustione oppure da vapore tecnologico o, eventualmente, da acqua o vapore ad elevata temperatura proveniente da collettori solari. Il vapore nascente, che presenta una minore concentrazione di soluto viene condensato fino ad uno stato di liquido sottoraffreddato e successivamente laminato (con differenze di pressione modeste). L'elemento successivo è l'evaporatore che consente di sottrarre calore ad un fluido a spese del calore latente dell'acqua. Affinchè il sistema sia efficace ad esempio per il condizionamento dell'aria occorre che la temperatura di vaporizzazione della solu-

<sup>5</sup>Vi sono anche altre miscele comunemente utilizzate. Ad esempio l'ammoniaca viene utilizzata come come refrigerante in una miscela acqua (soluto) - ammoniaca (solvente) nei processi ad assorbimento per la refrigerazione domestica ed in sistemi di piccola potenza (frigo per camper).

<sup>6</sup>L'acqua satura pura congela a 6.11 mbar. Trattandosi però di miscele di acqua e bromuro abbiamo un abbassamento del punto di congelamento ed un innalzamento della temperatura di vaporizzazione.

<sup>7</sup>La funzione dello scambiatore rigenerativo è semplicemente quella di pre-riscaldare la soluzione prima di inviarla nuovamente nei tubi vaporizzatori.

zione alla pressione dell'evaporatore sia sufficientemente bassa  $0 \div 5^\circ\text{C}$ . Per soluzioni di acqua e bromuro di litio tali condizioni si realizzano solo a pressioni molto basse<sup>8</sup>. Dopo l'evaporatore troviamo l'assorbitore  $A$  in cui avviene una miscelazione (esotermica) fra la soluzione ad elevata concentrazione proveniente dal concentratore (soluzione forte) e quella in uscita all'evaporatore. Dall'assorbitore la soluzione viene inviata nuovamente al concentratore, eventualmente attraverso uno scambiatore rigenerativo.

La prevalenza per la circolazione del fluido può essere fornita dal processo di vaporizzazione che avviene nel concentratore introducendo nell'impianto alcune valvole di non ritorno, oppure da opportune pompe di circolazione.

## 12.6 Pompe di Calore

Tutti i sistemi di refrigerazione possono essere considerati delle pompe di calore poiché assorbono energia termica da un serbatoio a bassa temperatura e la scaricano ad uno ad alta temperatura. La definizione di *pompa di calore* tuttavia è stata coniata per indicare un sistema in cui il calore scaricato dal condensatore viene utilizzato in qualche modo, molto spesso direttamente per produrre del caldo quando occorre, ad esempio in un condizionamento invernale. Il COP di una pompa di calore è dato dunque da quello che vogliamo ottenere (cioè il calore del condensatore) rispetto a quello che spendiamo per ottenerlo (lavoro di compressione). La denominazione “pompa di calore” trae la sua origine da una analogia meccanica in cui una pompa invia dell'acqua da un serbatoio a quota minore ad uno a quota superiore. In questo caso si pompa calore da una sorgente a bassa temperatura ad una a temperatura più elevata.

### 12.6.1 Pompe di calore reversibili

A questa classe appartengono le pompe di calore installate in abitazioni o piccoli esercizi commerciali. La pompa di calore in questo caso viene utilizzata per raffreddare l'ambiente in estate e riscaldarlo di inverno. Abbiamo ad esempio pompe di calore aria-aria, aria acqua ecc... comandate da motori elettrici o motori endotermici. Utilizzando una pompa di calore aria-acqua è possibile produrre acqua fredda d'estate “pommando” all'esterno il calore di un serbatoio d'acqua, oppure produrre acqua calda d'inverno raffreddando l'ambiente esterno. Le sorgenti di calore con cui può scambiare la pompa di calore sono: *aria*, *acqua* o *terreno* (mediante sonda geotermica). Una pompa di calore reversibile che scambia con *aria*<sup>9</sup> opera secondo lo schema indicato in figura 12.9. La valvola di inversione a 4 vie commuta l'aspirazione e la mandata del compressore fra lo scambiatore di destra e di sinistra rispettivamente, invertendo in tal modo il ciclo. Le valvole di ritegno forniscono un  $\Delta p$  infinito se attraversate da un verso, mentre un  $\Delta p$  trascurabile se attraversate da quell'altro. Pertanto nel caso in cui si abbia flusso orario la valvola di laminazione in basso a destra è attraversata da una modesta portata di fluido frigorifero.

<sup>8</sup>Ad esempio per una soluzione al 50% abbiamo  $t_s \simeq 5^\circ\text{C}$  ad una pressione pari a  $p_s = 1.5$  mbar. Trattandosi appunto di una soluzione satura d'acqua e bromuro di litio essa comunque non congela sotto 6.11 mbar.

<sup>9</sup>Nel caso di sonde geotermiche o altre tipologie di scambiatori di calore ovviamente l'evaporatore ed il condensatore hanno tipologia costruttiva differente da quella indicata in figura 12.9.

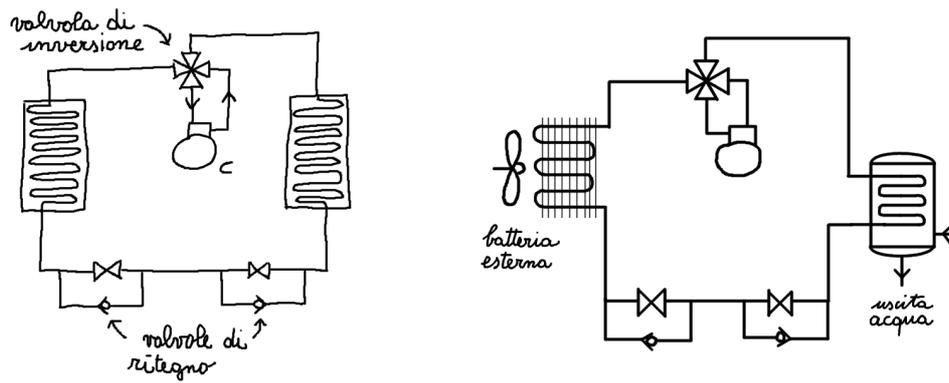


Figura 12.9: Schema di una pompa di calore reversibile che opera secondo un ciclo inverso. Nello schema di destra abbiamo l'utilizzo della pompa per scaldare o raffreddare l'acqua utilizzata, ad esempio, per la termoregolazione di una casa.

### Sorgenti di calore per pompe di calore reversibili

Le principali sorgenti di energia termica per pompe di calore residenziali e commerciali sono aria, acqua e terreno. L'acqua può venire da bacini o laghi oppure da un serbatoio. È possibile realizzare dei cicli combinati in cui si utilizza la tecnologia dei pannelli solari per fare caldo e la pompa di calore per integrare il eventualmente il calore mancante e fare il freddo. In questi impianti vi è solitamente un serbatoio di acqua che viene mantenuto ad una temperatura fissata (caldo d'inverno, freddo d'estate)

# Capitolo 13

## Cicli termodinamici

### 13.1 Cicli termodinamici dei motori alternativi

#### 13.1.1 Cicli teorici e cicli reali

Il fluido operante durante il passaggio nel motore è sottoposto ad una serie di trasformazioni chimiche e fisiche (compressione, espansione, combustione, scambio di calore con le pareti, ecc...) che costituiscono il ciclo del motore. L'esame quantitativo di questi fenomeni rappresenta un problema molto complesso. Perciò lo si semplifica ricorrendo a successive approssimazioni teoriche, ciascuna delle quali è basata su differenti presupposti semplificativi, aventi approssimazione crescente. Per i cicli *teorici* le approssimazioni comunemente impiegate, in ordine di avvicinamento alle condizioni reali, sono tre e sono chiamate: *ciclo ideale*, *ciclo ad aria* e *ciclo aria-combustibile*. A questi cicli teorici fanno riscontro nella pratica i *cicli reali*, che sono rilevati sperimentalmente per mezzo di apparecchi detti *indicatori*. Un ciclo reale è perciò detto anche *ciclo indicato*.

**Ciclo ideale** Nel ciclo ideale si suppone che il fluido sia costituito da aria e che questa si comporti come un gas perfetto. I valori dei calori specifici sono considerati costanti ed uguali a quelli dell'aria in condizioni standard (20 °C, 1.013 bar):  $c_p = 1 \text{ kJ}/(\text{kg K})$ ,  $c_v = 0.72 \text{ kJ}/(\text{kg K})$ ,  $\gamma = c_p/c_v = 1.4$ . Si suppone poi che le fasi di introduzione e sottrazione di calore abbiano una durata ben determinata e dipendente dal tipo di ciclo (Otto, Diesel, Sabathé). È chiaro che con queste ipotesi, si raggiungono valori di pressione e temperatura più elevati di quelli di reali, dunque un lavoro ed un rendimento più elevato. Il ciclo ideale rappresenta quindi il *limite massimo* che il motore può teoricamente raggiungere in fatto di prestazioni e permette uno studio matematicamente semplice basato sulle leggi dei gas perfetti.

**Ciclo ad aria** Il fluido operativo è ancora aria, ma si suppone che i calori specifici siano *variabili* nella gamma di temperature incontrate. Tutte le altre approssimazioni sono identiche a quelle del ciclo ideale.

**Ciclo aria-combustibile** Fra i cicli teorici, è il più vicino al comportamento del ciclo reale. Nel motore ad accensione per scintilla il fluido è composto durante la corsa di aspirazione dalla miscela e dai gas combusti residui; nel motore ad accensione per compressione da aria e dai gas combusti residui. Dopo la combustione il fluido è costituito teoricamente

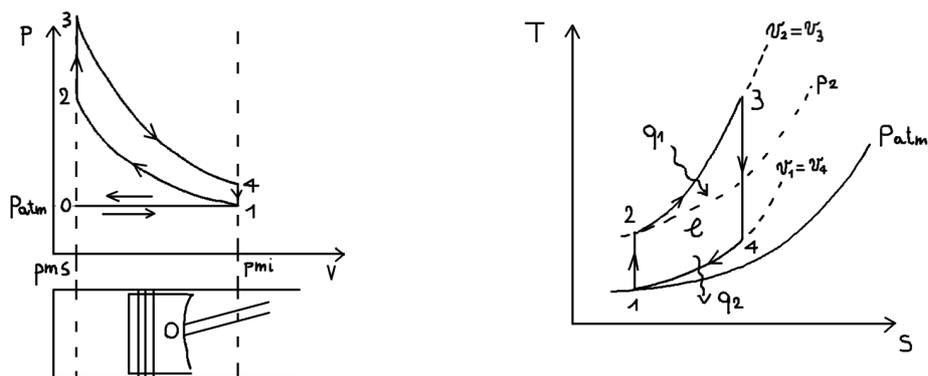


Figura 13.1: Ciclo Otto teorico in coordinate  $pV$  e  $Ts$ .

da una miscela di  $N_2$ ,  $CO_2$ ,  $CO$  ed  $H_2O$  (trascuriamo la produzione di  $NO_x$ ,  $SO_x$ , ecc...). Questi gas hanno un calore specifico superiore a quello dell'aria, pertanto la loro presenza nella miscela produce un abbassamento della temperatura e delle pressioni massime in confronto di quelle calcolate per il ciclo ad aria.

**Ciclo reale** Viene determinato sperimentalmente per mezzo di apparecchi in grado di registrare il diagramma delle pressioni in funzione della corsa dello stantuffo. Il *diaframma indicato* rispecchia le condizioni reali del ciclo e quindi tiene conto anche delle perdite di calore, dell'anticipo di accensione, delle perdite dovute agli anticipi ed ai ritardi nell'apertura delle valvole di aspirazione e scarico, ecc..

### 13.1.2 Ciclo Otto-Beau de Rochas teorico

Il ciclo Otto teorico è il ciclo ideale del motore ad accensione per scintilla ed è rappresentato in figura 13.1. Le trasformazioni termodinamiche che si verificano nel ciclo sono

- 0-1 fase di aspirazione;
- 1-2 compressione isoentropica;
- 2-3 combustione a volume costante, con sviluppo di calore  $Q_1$  e corrispondente innalzamento della temperatura e della pressione del fluido;
- 3-4 espansione isoentropica;
- 4-1 apertura della valvola di scarico, con conseguente sottrazione istantanea di calore  $Q_2$ ;
- 1-0 espulsione dei gas combusti

Utilizzando il principio della termodinamica per sistemi chiusi in cui sono contenuti gas perfetti è facile determinare che

$$q_1 = c_v (T_3 - T_2) \quad (13.1)$$

$$q_2 = c_v (T_4 - T_1) \quad (13.2)$$

Pertanto il coefficiente economico del ciclo ideale è

$$\varepsilon_{\text{Otto}} = \frac{q_1 - q_2}{q_1} = 1 - \frac{(T_3 - T_2)}{(T_4 - T_1)} \quad (13.3)$$

Poiché abbiamo trasformazioni adiabatiche reversibili di un gas perfetto e  $v_2 = v_3$ ,  $v_4 = v_1$

$$\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_4}{T_3} \quad (13.4)$$

Definiamo il *rapporto volumetrico di compressione*  $\rho = v_2/v_1$ . Utilizzando (13.4) possiamo scrivere il coefficiente economico come

$$\varepsilon_{\text{Otto}} = 1 - \frac{T_2 (T_3/T_2 - 1)}{T_1 (T_4/T_1 - 1)} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (13.5)$$

cioè

$$\boxed{\varepsilon_{\text{Otto}} = 1 - \frac{1}{\rho^{\gamma-1}}} \quad (13.6)$$

Infatti, sempre in virtù della (13.4)

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_4 T_3 T_2}{T_3 T_2 T_1} = \frac{T_3}{T_2} \quad (13.7)$$

Aumentando il rapporto di compressione volumetrico aumenta il coefficiente economico del ciclo. Vi è un limite superiore al rapporto di compressione (che di norma è inferiore a  $10 \div 12$ ). Questo limite è introdotto dalla possibilità che la miscela aria-benzina raggiunga le condizioni di detonazione. Le proprietà detonanti delle benzine sono caratterizzate in termini del numero di Ottano.

### 13.1.3 Ciclo Diesel teorico

È il ciclo teorico dei motori ad accensione per compressione. La differenza fondamentale fra i cicli Otto e Diesel consiste nella fase di introduzione del calore. Nel ciclo Otto il calore è introdotto a volume costante mentre in quello Diesel a pressione costante. Altra differenza importante fra i due cicli è nel rapporto di compressione. Infatti il ciclo Diesel comprime fondamentalmente aria ed il combustibile viene iniettato ad alta pressione in prossimità del punto morto superiore. Pertanto non vi è il problema della detonazione della miscela. Appliciamo il primo principio della termodinamica per sistemi chiusi in forma entalpia per quantificare il calore introdotto in fase di combustione. Trattandosi di un gas perfetto

$$dq = dh + vdp = dh = c_p dT \quad \Rightarrow q_1 = c_p (T_3 - T_2) \quad (13.8)$$

Inoltre il calore scambiato a volume costante è

$$q_2 = c_v (T_4 - T_1) \quad (13.9)$$

Pertanto il coefficiente economico è

$$\varepsilon_{\text{Diesel}} = 1 - \frac{c_v (T_4 - T_1)}{c_p (T_3 - T_2)} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_1 \left(\frac{T_4}{T_1} - 1\right)}{T_2 \left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right)} \quad (13.10)$$

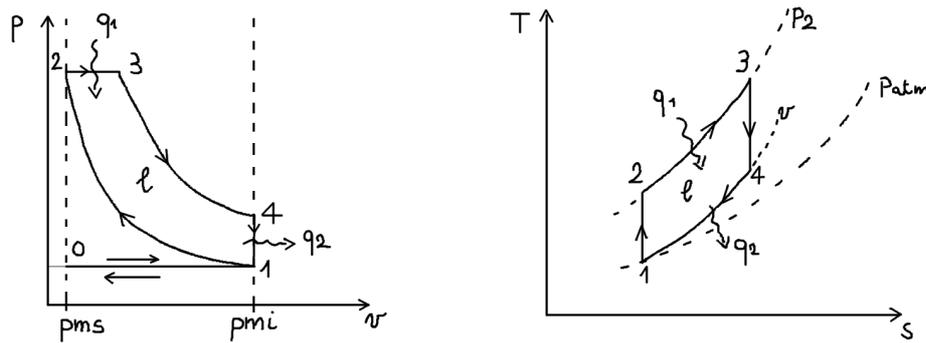


Figura 13.2: Ciclo Diesel teorico in coordinate  $pv$  e  $Ts$ .

Lungo la trasformazione a pressione costante abbiamo

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{v_3}{v_2} \quad (13.11)$$

Inoltre lungo le isoentropiche di compressione ed espansione abbiamo

$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{v_4}{v_3}\right)^{\gamma-1} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{1}{\rho^{\gamma-1}} \quad (13.12)$$

Dalle precedenti, considerato che  $v_4 = v_1$ , otteniamo

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_4}{T_3} \frac{T_3}{T_2} \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_3}{v_4}\right)^{\gamma-1} \frac{v_3}{v_2} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{v_3}{v_1}\right)^{\gamma} \frac{v_1 v_3 v_2}{v_3 v_2 v_1} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\gamma} = \left(\frac{v_3}{v_2}\right)^{\gamma} \quad (13.13)$$

Posto  $\tau_p = v_3/v_2$  il rapporto di combustione a pressione costante otteniamo

$$\boxed{\varepsilon_{\text{Diesel}} = 1 - \frac{1}{\rho^{\gamma-1}} \underbrace{\left[ \frac{\tau_p^{\gamma} - 1}{\gamma(\tau_p - 1)} \right]}_{>1}} \quad (13.14)$$

A parità di rapporto di compressione volumetrico  $\rho$  il coefficiente economico del ciclo Diesel è inferiore a quello del corrispondente ciclo Otto. Ciò è dovuto al fatto che il termine fra parentesi è sempre positivo. Riducendo il rapporto di combustione  $\tau_p$  cioè riducendo il calore introdotto a pressione costante il coefficiente economico del ciclo Diesel si avvicina a quello del ciclo Otto ed idealmente lo raggiunge per  $\tau_p \rightarrow 1$ .

### 13.1.4 Ciclo Sabathé teorico

Le condizioni reali di funzionamento dei motori sono lontane da quelle dei cicli ideali Otto e Diesel. Per i motori Diesel il processo di combustione si avvicina alla trasformazione a pressione costante solo nel caso di motori eccezionalmente grandi e lenti. Normalmente il diagramma di indicatore mostra che la combustione avviene secondo un processo che si avvicina alla combinazione di una trasformazione a volume costante e di una a pressione costante. In pratica i cicli Otto e Diesel si avvicinano molto nella forma, tanto da potersi considerare casi particolari di un ciclo misto, nel quale la combustione avviene in parte a

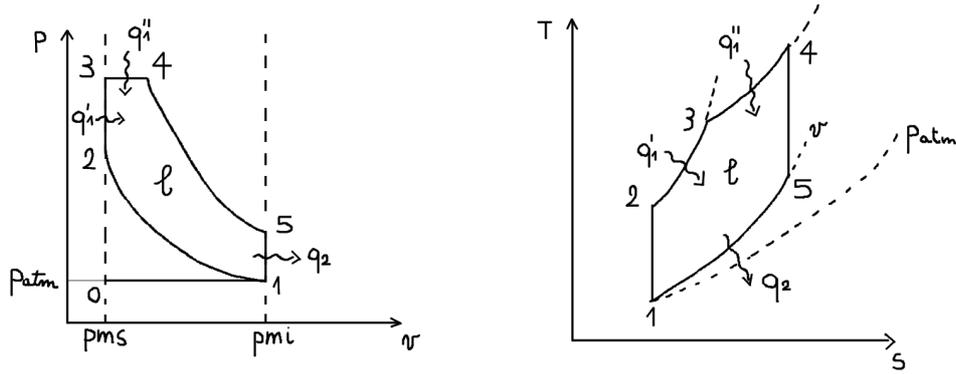


Figura 13.3: Ciclo misto in coordinate  $pv$  e  $Ts$ .

volume costante ed in parte a pressione costante. La quantità totale di calore introdotta vale  $q_1 = q_1' + q_1''$ . Il rendimento termico ideale del ciclo Sabathé teorico vale

$$\varepsilon_{\text{Sabathé}} = 1 - \frac{c_v (T_5 - T_1)}{c_p (T_4 - T_3) + c_v (T_3 - T_2)} \quad (13.15)$$

Al solito ricerchiamo una opportuna forma adimensionalizzata

$$\varepsilon_{\text{Sabathé}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \frac{(T_5/T_1 - 1)}{\gamma T_3/T_2 (T_4/T_3 - 1) + (T_3/T_2 - 1)} \quad (13.16)$$

La trasformazione  $\overline{23}$  è a volume costante, dunque

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{p_3}{p_2} := \tau_v \quad (13.17)$$

ove  $\tau_v$  è il *rapporto di combustione a volume costante*. Analogamente per la trasformazione a pressione costante  $\overline{34}$  abbiamo

$$\frac{T_4}{T_3} = \frac{v_4}{v_3} := \tau_p \quad (13.18)$$

in cui  $\tau_p$  *rapporto di combustione a pressione costante*. Lungo le isoentropiche abbiamo sempre

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\rho^{\gamma-1}} \quad (13.19)$$

Inoltre

$$\frac{T_5}{T_1} = \frac{T_5}{T_4} \frac{T_4}{T_3} \frac{T_3}{T_2} \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_4}{v_5}\right)^\gamma \frac{v_5}{v_4} \frac{v_4}{v_3} \frac{p_3}{p_2} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^\gamma \frac{v_2}{v_1} \quad (13.20)$$

Tenuto conto che  $v_5 = v_1$ ,  $v_3 = v_2$  otteniamo

$$\frac{T_5}{T_1} = \frac{p_3}{p_2} \left(\frac{v_4}{v_2}\right)^\gamma = \tau_v \tau_p^\gamma \quad (13.21)$$

Otteniamo infine

$$\varepsilon_{\text{Sabathé}} = 1 - \frac{1}{\rho^{\gamma-1}} \left[ \frac{\tau_v \tau_p^\gamma - 1}{\gamma \tau_v (\tau_p - 1) + (\tau_v - 1)} \right] \quad (13.22)$$

A parità di rapporto di compressione volumetrico il rendimento del ciclo misto risulta intermedio fra quello del ciclo Otto e quello del ciclo Diesel.

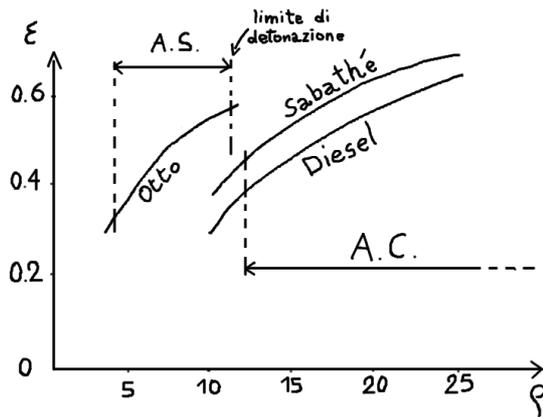


Figura 13.4: Confronto fra i rendimenti termici dei cicli teorici a vari rapporti di compressione volumetrici. Vengono indicati i campi in cui operano i motori ad accensione per compressione (A.C.) e i motori ad accensione per scintilla (A.S.).

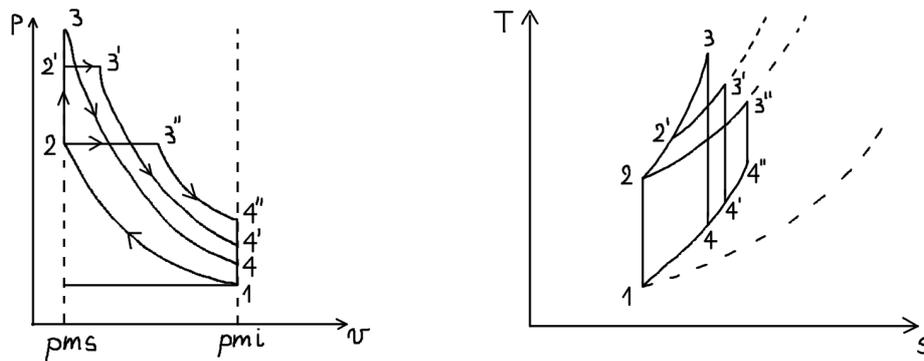


Figura 13.5: Confronto fra i tre cicli teorici (Otto, Diesel e Sabathé) a parità di calore introdotto e rapporto di compressione volumetrico.

### 13.1.5 Confronto fra i tre cicli teorici

Per confrontare i cicli Otto, Diesel e Sabathé è necessario fissare alcuni parametri di riferimento, quali ad esempio il rapporto di combustione a pressione ed a volume costante. In figura 13.4 tracciamo le curve dei rendimenti termici in funzione del rapporto di compressione. Per dato rapporto di compressione il ciclo Otto ha rendimento migliore, il ciclo Diesel peggiore. È però da considerare il fatto che i motori Diesel hanno rapporti di compressione che variano da 14 a 23 mentre i motori accensione per scintilla non superano generalmente il valore di 11 per non incorrere nella detonazione. Quindi in realtà il motore Diesel ha un rendimento termico superiore al motore a ciclo Otto. In figura 13.5 sono confrontati i tre cicli ideali a parità di rapporto di compressione volumetrico e quantità di calore fornito. Si nota che il ciclo Diesel è quello che scarica la maggiore quantità di calore, dunque è quello che ha rendimento peggiore. Inoltre le temperature e le pressioni di picco del ciclo Otto sono le più elevate dei tre. *Il ciclo che permette la più grande espansione del fluido attivo dopo la fase di introduzione del calore ha il rendimento più elevato.* Nella

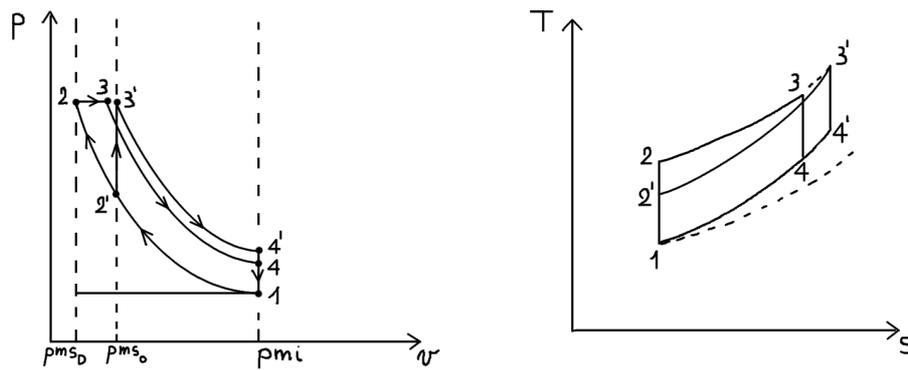


Figura 13.6: Confronto fra il ciclo Otto ed il Diesel a parità di pressione massima e calore introdotto. Si nota che il rapporto di compressione volumetrico ed il rendimento termico totale sono maggiori per il ciclo Diesel.

figura 13.6 confrontiamo il ciclo Otto ed il ciclo Diesel a parità di pressione massima e calore fornito. In questo caso è il ciclo Diesel ad avere una temperatura di scarico minore dunque rendimento più elevato.

### 13.1.6 Pressione media teorica e pressione media indicata

Durante un ciclo di un motore alternativo la pressione varia in ogni istante. Se si tenesse conto di questo continuo variare della pressione per la valutazione della potenza ed il dimensionamento di massima dei cuscinetti di banco, si incorrerebbe in calcoli complicati. Il calcolo diventa molto semplice livellando la pressione ad un valore medio in modo tale che il prodotto di tale valore per la cilindrata fornisca il lavoro utile teorico del ciclo, oppure il lavoro indicato. La pressione media (o la pressione media indicata) è un parametro fondamentale del motore che fornisce subito una idea delle prestazioni e sul carico. Di norma la pressione media indicata è maggiore per il ciclo Otto.

### 13.1.7 Differenze fra il cicli teorici ed i cicli indicati

Esistono delle differenze sostanziali fra i cicli teorici ed i cicli indicati sia nella forma del diagramma che nei valori delle pressioni e delle temperature. Le *differenze di forma* del ciclo indicato rispetto a quello teorico sono da ricercarsi nelle seguenti ragioni:

1. perdite di calore (*A*);
2. combustione non istantanea (necessità di un *anticipo* di accensione) (*B*);
3. tempo di apertura della valvola di scarico (necessità di un anticipo di apertura) (*C*);
4. lavoro di pompaggio di immissione ed espulsione del fluido dovuto a perdite di carico attraverso le valvole di aspirazione e scarico (*D*).

Le differenze di pressione e temperatura invece sono principalmente dovute a calori specifici del fluido dipendenti dalla temperatura ed alla presenza di prodotti di combustione in grado di dissociarsi assorbendo calore. Dall'analisi del diagramma indicato si ricava la pressione media indicata facendo il rapporto fra l'area del diagramma e la cilindrata di

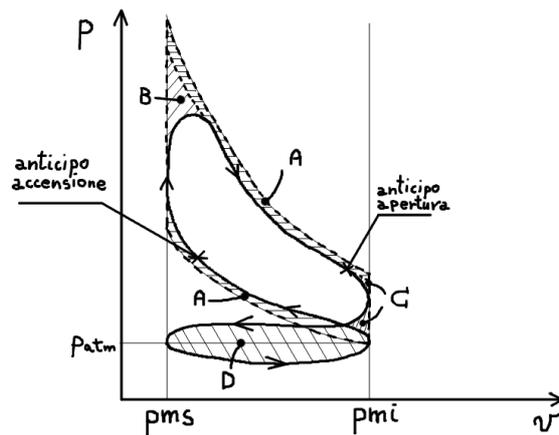


Figura 13.7: Confronto fra il ciclo Otto teorico e quello indicato. Abbiamo: perdite di calore  $A$ ; perdite per lavoro di pompaggio  $D$ ; perdite dovute all'anticipo di accensione  $B$  e all'anticipo di scarico  $C$

uno stantuffo. Se è nota la pressione media indicata, allora possiamo facilmente ottenere la potenza indicata moltiplicando per la cilindrata totale del motore.

Gli apparecchi indicatori (ad esempio, quello di Farnboro) vengono usati per studi di laboratorio, per controllare le irregolarità del ciclo. In particolare è possibile studiare gli effetti di un anticipo di accensione non ottimale, gli effetti dello strozzamento della valvola a farfalla nel collettore di aspirazione, gli effetti di un anticipo non ottimale dell'apertura delle valvole di scarico, ecc... ecc... Possiamo tracciare vari diagrammi di indicatore corrispondenti a diverse scelte di questi parametri di riferimento.

## 13.2 Cicli a vapore

Gli impianti motori a vapore sono i sistemi di conversione energetica più importanti nel campo delle alte potenze e costituiscono il riferimento termodinamico per la schematizzazione dei grandi impianti per la produzione dell'energia elettrica. Il fluido motore più utilizzato è acqua. Esistono anche applicazioni con fluidi speciali che non presentiamo. Il ciclo è di norma chiuso. In linea teorica, considerando la natura del fluido motore (acqua) nulla vieterebbe l'impiego di un ciclo aperto. Tuttavia questa soluzione appare improponibile per alcuni motivi fondamentali fra cui

1. la necessità di utilizzare acqua opportunamente trattata per motivi di affidabilità;
2. la necessità eseguire una condensazione a pressione molto bassa, per motivi di rendimento termodinamico e lavoro utile.

In un esame preliminare del ciclo<sup>1</sup> consideriamo il *circuito elementare* illustrato in figura 13.8. Ricordiamo che le curve isobare in un diagramma  $Ts$  nella zona del liquido

<sup>1</sup>Ricordiamo che quando mettiamo un punto in un diagramma termodinamico vuole dire che il sistema è in condizioni di equilibrio termodinamico. In questo caso il sistema è in condizioni stazionarie. Uno schema di calcolo più accurato contempla coordinate termodinamiche di ristagno, in cui il fluido è ipoteticamente rallentato fino ad una condizione di equilibrio termodinamico.

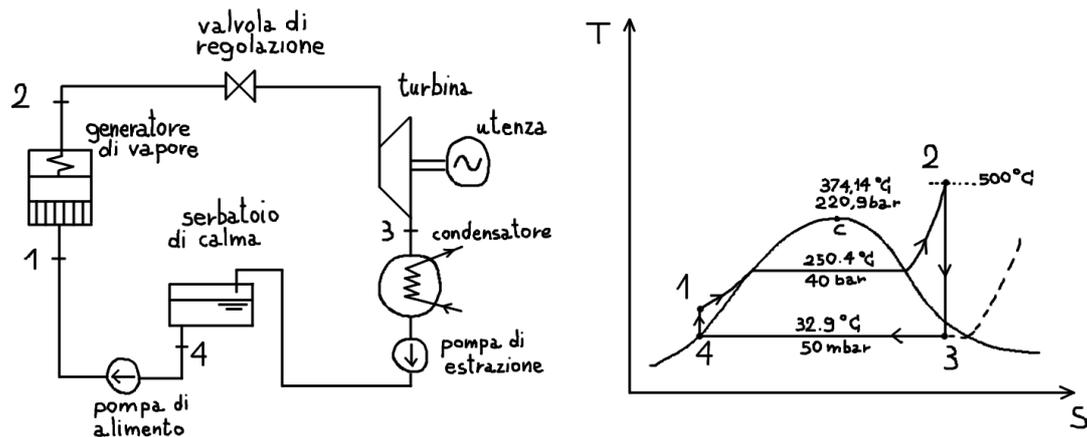


Figura 13.8: Circuito elementare di impianto a vapore e trasformazioni termodinamiche del ciclo di Hirn in un diagramma  $Ts$  (con alcuni valori plausibili del ciclo).

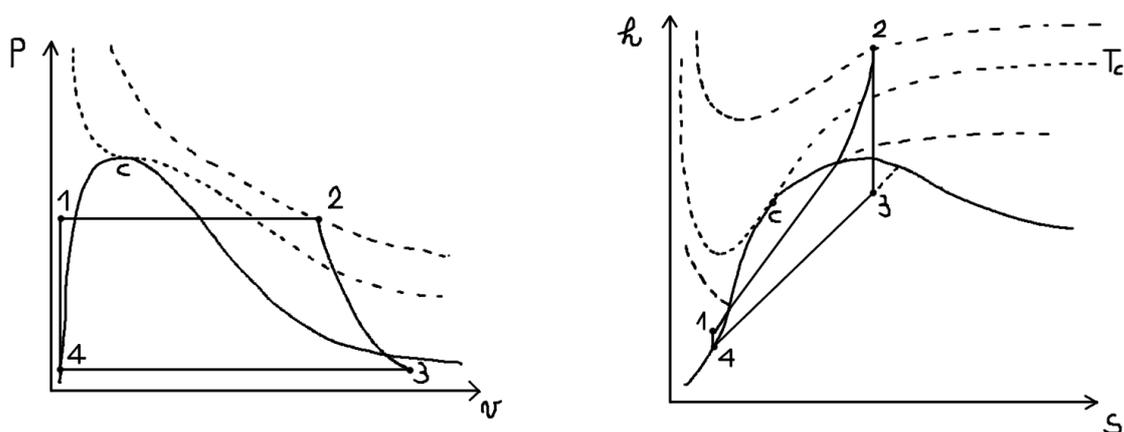


Figura 13.9: Trasformazioni termodinamiche del ciclo di Hirn nel diagramma  $pv$  e  $hs$ .

sono delle curve esponenziali

$$ds = \frac{dq}{T} \Rightarrow \left( \frac{ds}{dT} \right)_p = \frac{T}{c_p} \Rightarrow T(s) = T_0 e^{\frac{s-s_0}{c_p}} \quad (13.23)$$

mentre le isoentropiche in un diagramma  $pv$  stanno sempre fra le isocore e le isoterme. In figura 13.9 illustriamo il ciclo di Hirn ideale nei diagrammi  $pv$  e di Mollier  $hs$ . Le trasformazioni di compressione ed espansione sono assunte isoentropiche, ed il processo di evaporazione e condensazione avviene a pressione costante. Nel caso reale la compressione e l'espansione sono rappresentabili come delle adiabatiche irreversibili (introducendo un opportuno rendimento rispetto all'isoentropica oppure un esponente politropico) e si ha una perdita di pressione nel generatore di vapore, nel condensatore e nei vari elementi di interconnessione. Il ciclo di Rankine è un ciclo di Hirn in cui non viene eseguito un surriscaldamento. Ci occupiamo di cicli subcritici, cioè di cicli in cui la vaporizzazione avviene ad una pressione minore di 220.9 bar. Esistono caldaie ad irraggiamento in grado

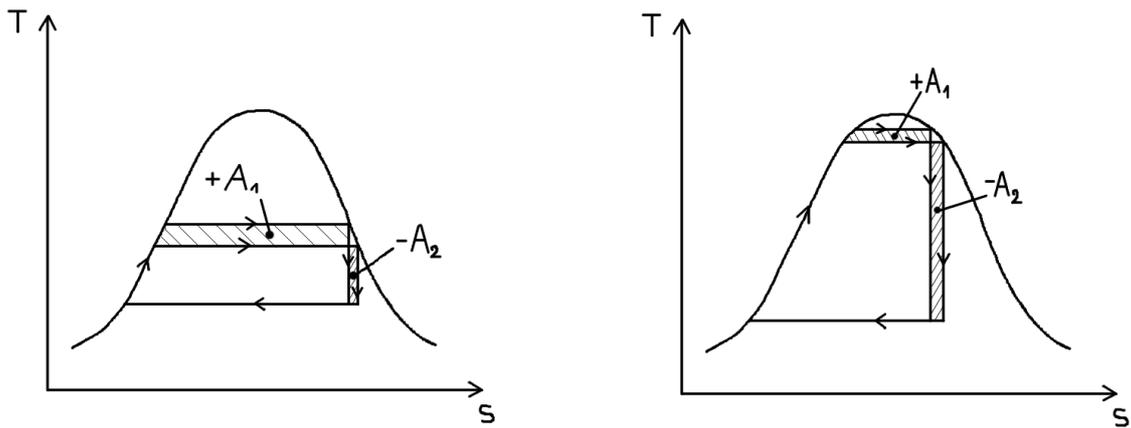


Figura 13.10: Influenza della pressione di vaporizzazione sul coefficiente economico di un ciclo di Rankine. Si vede che nel campo delle basse pressioni  $\varepsilon$  cresce al crescere della pressione di caldaia ( $L$  cresce  $Q_2$  cala). Nel campo delle alte pressioni  $L$  decresce e  $Q_2$  decresce: se  $L$  decresce più rapidamente di  $Q_2$  si ha una riduzione di  $\varepsilon$ .

di realizzare dei cicli ipercritici, in cui la vaporizzazione avviene a pressione maggiore di 220 bar, per attraversamento diretto della isoterma critica  $374.14^\circ\text{C}$ .

### 13.2.1 Influenza della pressione di vaporizzazione e di condensazione sul lavoro utile e sul coefficiente economico

L'analisi energetica di ogni ciclo termodinamico va condotta caso per caso, soprattutto se il ciclo è complesso. Tuttavia nella sua forma semplificata è possibile eseguire alcune considerazioni di carattere puramente qualitativo che forniscono indicazioni sui valori di pressione caratteristici del ciclo. Per semplicità ci riferiamo al caso di un ciclo di Rankine. In figura 13.10 illustriamo gli effetti di un aumento della pressione di vaporizzazione in un ciclo che opera a bassa pressione e ad alta pressione. Ricordiamo che un'area racchiusa da un ciclo in un diagramma  $Ts$  rappresenta un lavoro. Si nota che nel campo delle basse pressioni il lavoro cresce ( $A_1 > A_2$ ) mentre il calore ceduto al condensatore ( $Q_2$ ) si riduce. Pertanto il coefficiente economico cresce

$$\varepsilon = \frac{L}{Q_1} = \frac{1}{1 + Q_2/L} \quad (13.24)$$

Per contro nel campo delle alte pressioni notiamo che entrambi il lavoro utile ed il calore ceduto al condensatore si riducono a seguito di un aumento di pressione. Se il lavoro utile decresce più rapidamente del calore ceduto, il coefficiente economico cala. In ogni caso in un ciclo di Rankine non si spinge sopra i 20 bar come pressione di vaporizzazione dato che si avrebbe un vapore d'acqua con un titolo inaccettabile a fine espansione.

Per migliorare il rendimento termodinamico del ciclo conviene ridurre la pressione di condensazione il più possibile, compatibilmente con la necessità di dover cedere del calore ad un fluido di raffreddamento<sup>2</sup>. Gli effetti di un abbassamento della pressione di condensazione sono illustrati in figura 13.11 in cui si nota che il lavoro utile viene

<sup>2</sup>La pressione di condensazione è in corrispondenza biunivoca con la temperatura di saturazione del fluido. Nel caso dell'acqua, dall'analisi delle curve limite risulta che spingersi sotto 50 mbar sarebbe



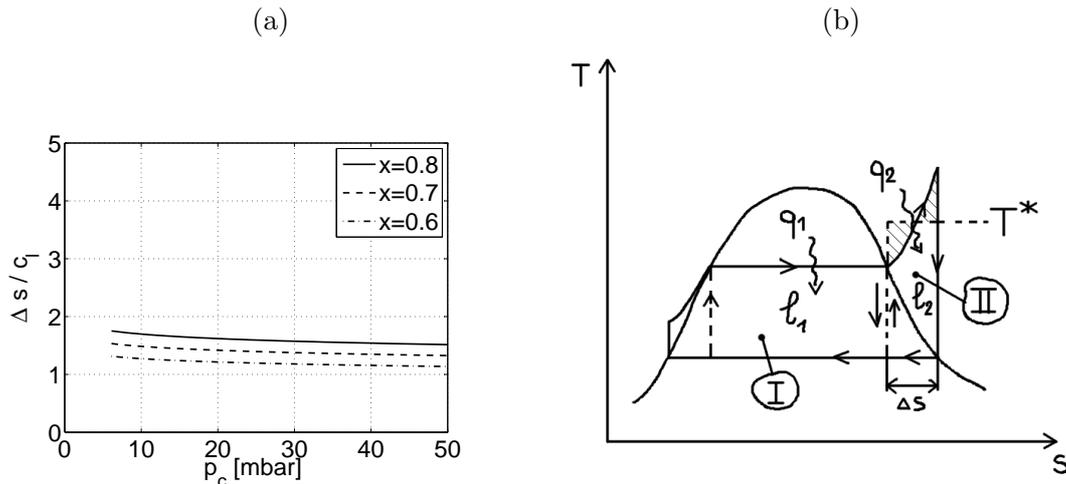


Figura 13.12: (a) Grafico che riporta esprime  $\Delta L/\Delta q_1$  in funzione della pressione di condensazione e del titolo del vapore saturo in uscita dalla turbina. Poiché per l'acqua risulta  $\Delta L/\Delta q_1 > 1$  concludiamo che conviene ridurre la pressione di condensazione il più possibile compatibilmente le esigenze di scambio termico al condensatore. (b) Notazione per dimostrare che il coefficiente economico del ciclo di Hirn è migliore di quello del ciclo di Rankine.

Il coefficiente economico del ciclo composto I+II è

$$\varepsilon_{1+2} = \frac{l_1 + l_2}{q_1 + q_2} = \frac{q_1}{q_1 + q_2} \varepsilon_1 + \frac{q_2}{q_1 + q_2} \varepsilon_2 \quad (13.30)$$

cioè è una media pesata sui calori ricevuti dei coefficienti economici dei sottocicli. Impiegando opportune disuguaglianze che distinguono due casi  $q_1 \leq q_2$ , è possibile dimostrare che si ha sempre

$$\boxed{\varepsilon_{1+2} > \varepsilon_1} \quad (13.31)$$

Più semplicemente possiamo considerare una seconda ordinata di compenso per il ciclo 1 + 2 tale che il calore ricevuto ed il lavoro prodotto sia equivalente al ciclo 1 più il ciclo 2 presi separatamente. Tale ordinata di compenso si trova a temperatura superiore alla massima del ciclo 1. Considerando l'espressione del coefficiente ciclo di Carnot equivalente a 1 + 2 è immediato provare la (13.31).

### 13.2.3 Possibili miglioramenti al circuito elementare

Vi sono diversi accorgimenti che possono essere adottati per migliorare termodinamicamente il circuito elementare di Hirn. Fra essi ricordiamo

- Surriscaldamenti ripetuti.
- Rigenerazione termica.

**Surriscaldamenti ripetuti** La temperatura di picco del ciclo (oggi attestata comunque sotto i 700 °C) è determinata soprattutto da problemi di corrosione (indotti dall'impiego di combustibili non pregiati) e dal costo dei materiali. Con tale valore di temperatura

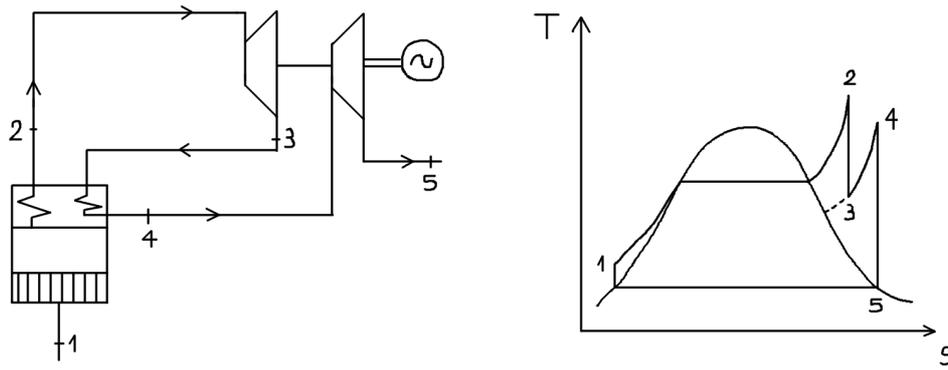


Figura 13.13: Schema di surriscaldamento. In aggiunta ai parametri che identificano un ciclo di Hirn, per il ciclo surriscaldato abbiamo: pressione di surriscaldamento, temperatura di secondo surriscaldamento.

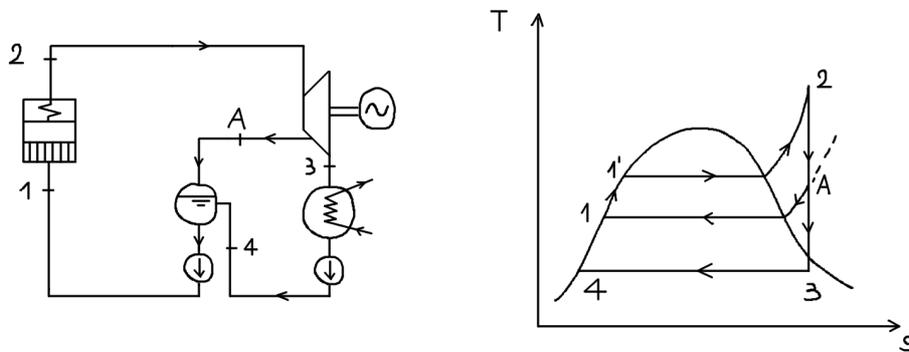


Figura 13.14: Processo di rigenerazione termica mediante uno spillamento a miscela.

massima e con i rendimenti isoentropici delle turbine oggi disponibili vi è comunque la possibilità che si raggiunga la condensazione in corrispondenza degli ultimi stadi di turbina. Pertanto è diffusa la pratica di un doppio surriscaldamento o surriscaldamento del ciclo. Esso consiste nel riportare il vapore dopo una prima espansione nella caldaia ad irraggiamento prima di re-inviarlo alla turbina di bassa pressione. Lo schema dell'impianto ed il ciclo termodinamico associato sono illustrati in figura 13.13.

**Rigenerazione termica** Il processo di rigenerazione termica consente di migliorare il rendimento del ciclo termodinamico attraverso uno scambio *interno* di calore, ad esempio prelevando parte della portata di vapore surriscaldato per preriscaldare l'acqua di alimento al generatore di vapore. La rigenerazione termica si avvale principalmente di due tipi di scambiatori di calore: *a miscela* ed *a superficie*. Nella prima tipologia si ha un contatto diretto fra i fluidi che scambiano calore. Nel secondo caso il fluidi che scambiano calore sono fisicamente separati. In figura 13.14 illustriamo un processo di rigenerazione termica con un solo spillamento a miscela. In ogni caso il circuito che opera la rigenerazione termica ha almeno uno scambiatore a miscela con funzione specifica di "polmone" per il fluido di alimento. Tale elemento svolge anche funzioni di *degasatore* del circuito. La

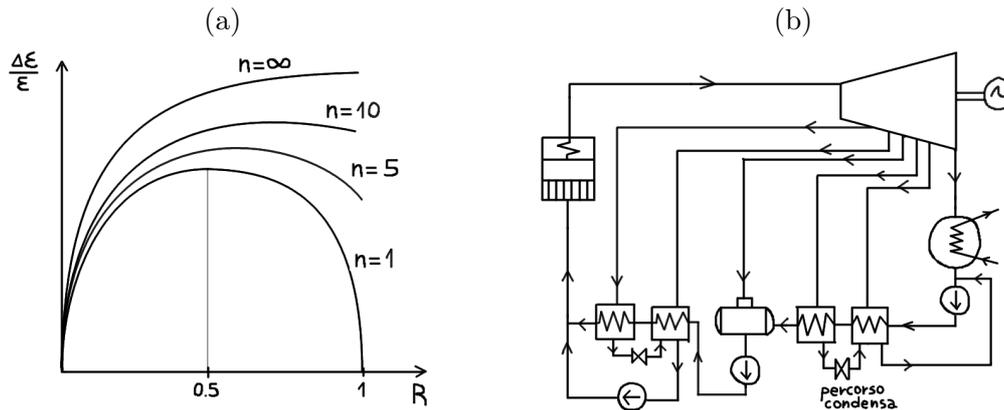


Figura 13.15: (a) Effetti del numero di spillamenti sulla variazione del rendimento termodinamico del ciclo. (b) Schema di impianto a vapore con 4 spillamenti a superficie ed uno a miscela che funge da degasatore.

variazione del coefficiente economico in funzione del rapporto di rigenerazione

$$R = \frac{h_1 - h_4}{h_{1'} - h_4} \quad (13.32)$$

è illustrato in figura 13.15.

### 13.3 Cicli a Gas

Il primo brevetto sul motore a turbina risale al 1791 ed il primo progetto è di Stolze (1872). Tuttavia sviluppi significativi sono avvenuti solo in tempi relativamente recenti ed essenzialmente sono dovuti a due fattori principali:

- lo sviluppo di materiali in grado di resistere ad elevate temperature e sollecitazioni;
- una approfondita conoscenza dei fenomeni aerodinamici che avvengono nei compressori e nelle turbine.

Gli sviluppi sono stati veramente eccezionali negli anni successivi all'ultimo conflitto mondiale, soprattutto nel campo della propulsione aeronautica, che ha fornito un grosso impulso allo studio delle turbomacchine. Le caratteristiche principali degli impianti con turbine a gas sono

- basso costo di impianto;
- possibilità di avere transitori rapidi;
- il funzionamento non necessita di acqua di raffreddamento (come avviene per il condensatore di un impianto a vapore).

Il *circuito elementare* per lo studio dei cicli a gas è illustrato in figura 13.16. Possiamo avere un circuito aperto oppure un circuito chiuso, quest'ultimo essendo impiegato in particolare nei cicli frigoriferi a gas. In quest'ultimo caso notiamo la presenza di due scambiatori di calore. Il fluido motore è di norma aria, che può essere trattata come un

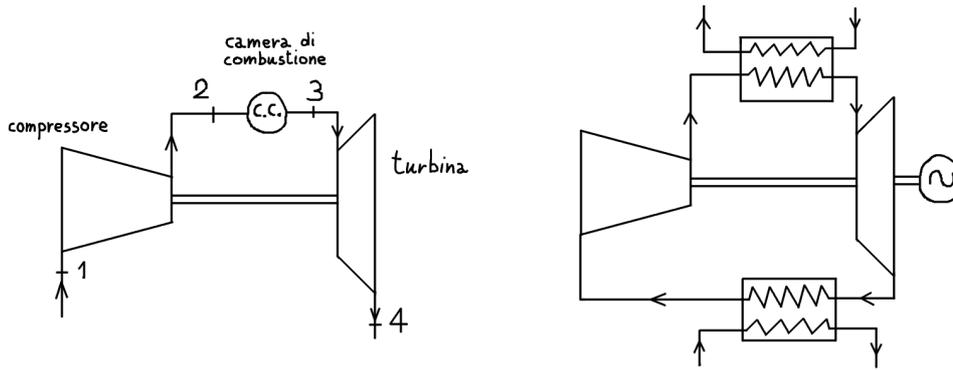


Figura 13.16: Circuiti elementari per lo studio dei cicli a gas.

gas perfetto oppure come un gas reale a seconda del grado di approssimazione voluto. Nella camera di combustione si ha iniezione di combustibile ed una reazione chimica di combustione che innalza la temperatura e trasforma la composizione chimica del fluido. Insomma, valgono le stesse considerazioni fatte in §13.1.1, cioè possiamo avere cicli ideali, cicli ad aria, cicli aria-combustibile ecc.... Giova rilevare tuttavia che le turbine a gas operano di norma con grandi eccessi d'aria (la portata d'aria è  $15 \div 20$  volte superiore a quella stechiometrica), dunque l'approssimazione del ciclo ad aria è accettabile.

### 13.3.1 Ciclo ideale (Brayton-Joule)

Il ciclo a gas ideale considera l'aria il fluido motore come un gas perfetto. Le trasformazioni di compressione ed espansione sono adiabatiche e reversibili mentre la combustione è isobara. I gas caldi scaricati dalla turbina sono dispersi nell'ambiente nel caso di ciclo aperto, cioè il ciclo termodinamico si chiude fuori dalla macchina<sup>3</sup>. Il coefficiente economico del ciclo ideale è

$$\varepsilon = \frac{l_t - l_c}{q_1} = 1 - \frac{q_2}{q_1} \quad (13.33)$$

ove

$$q_1 = c_p (T_3 - T_2) \quad (13.34)$$

$$q_2 = c_p (T_4 - T_1) \quad (13.35)$$

$$(13.36)$$

Pertanto

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_1 T_4 / T_1 - 1}{T_2 T_3 / T_2 - 1} \quad (13.37)$$

cioè<sup>4</sup>

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{\beta(\gamma-1)/\gamma} \quad (13.39)$$

<sup>3</sup>Trattandosi spesso di gas ad elevata entalpia in tempi recenti si è pensato di recuperare tale energia ad esempio in una caldaia a recupero di un impianto a vapore oppure in un sistema di cogenerazione (turbogas-termico).

<sup>4</sup>Infatti abbiamo

$$\frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1} = \frac{\frac{T_4}{T_3} \frac{T_3}{T_2} \frac{T_3}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1} = \frac{\frac{T_3}{T_2} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1} = 1 \quad (13.38)$$

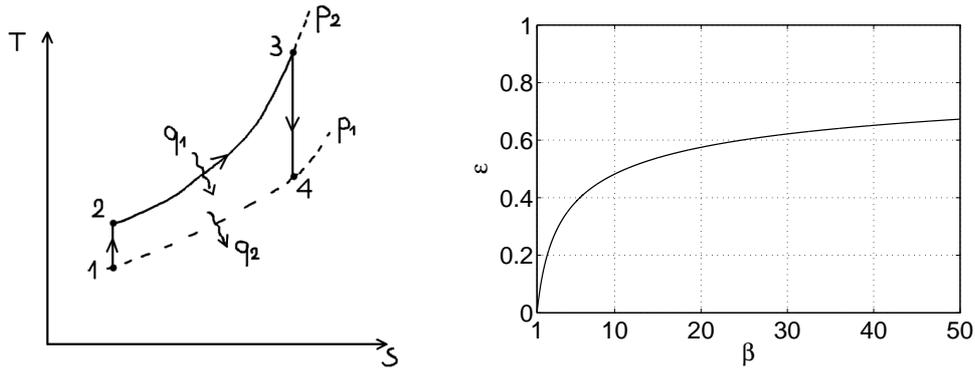


Figura 13.17: Ciclo ideale di Bryton-Joule e rendimento in funzione del rapporto di compressione.

Pertanto il coefficiente economico del ciclo ideale non dipende dalle temperature e dalle pressioni, ma solo dal rapporto di compressione. Questo fatto potrebbe sembrare strano a prima vista. Tuttavia notiamo che è possibile scomporre il ciclo di Bryton-Joule in cicli infinitesimi di Carnot che hanno le trasformazioni isoterme appoggiate sulle due isobare. Poiché per il rapporto fra le suddette isoterme è costante lungo le isobare di un gas perfetto e vale proprio  $1/\beta^{(\gamma-1)\gamma}$ , tutti i cicli infinitesimi di Carnot infinitesimi hanno lo stesso rendimento (13.39). Il coefficiente economico del ciclo composto è la media pesata sui calori ricevuti dei coefficienti economici dei vari cicli. Poiché questi sono identici si ha che il rendimento globale coincide con quello di un ciclo infinitesimo.

### Rapporto di compressione che massimizza il lavoro utile per fissata TIT (turbine inlet temperature)

Consideriamo l'espressione del lavoro utile<sup>5</sup>

$$l_u = l_t - l_c = c_p(T_3 - T_4) - c_p(T_2 - T_1) = c_p T_1 \left( \frac{T_3}{T_1} - \frac{T_4}{T_1} - \frac{T_2}{T_1} + 1 \right) \quad (13.40)$$

Poniamo  $\kappa = (\gamma - 1)/\gamma$  e  $\alpha = T_3/T_1$ . Consideriamo il lavoro utile adimensionalizzato

$$\begin{aligned} \frac{l_u}{c_p T_1} &= \frac{T_3}{T_1} - \frac{T_3 T_4}{T_1 T_3} - \frac{T_2}{T_1} + 1 \\ &= \alpha - \alpha \beta^{-\kappa} - \beta^\kappa + 1 \end{aligned} \quad (13.41)$$

Per  $\beta = p_2/p_1 = 1$  otteniamo  $l_u/(c_p T_1) = 0$ . Il lavoro utile ha un massimo in funzione di  $\beta$  per fissate temperature  $T_1$  e  $T_3$ . Infatti

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{l_u}{c_p T_1} \right) = \alpha \kappa \beta^{-\kappa-1} - \kappa \beta^{\kappa-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \alpha^{\frac{1}{2\kappa}} \quad (13.42)$$

Il grafico è illustrato in figura 13.18. È facile accorgersi che tale scelta del rapporto di com-

<sup>5</sup>Notare che in questa espressione non stiamo considerando il concetto di *eccesso d'aria* o rapporto aria/combustibile. In altre parole il fluido motore considerato esclusivamente aria.

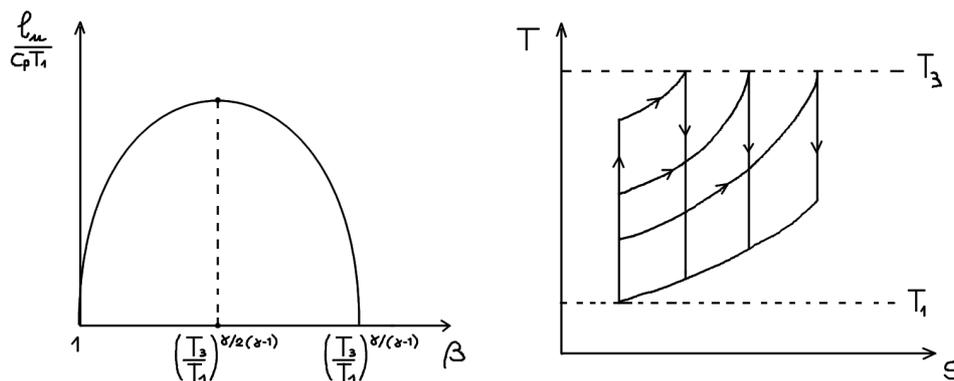


Figura 13.18: Rapporto di compressione  $\beta$  che massimizza il lavoro utile a parità di temperatura di aspirazione e temperatura di picco del ciclo (TIT).

pressione rende la temperatura di scarico della turbina pari a quella di fine compressione. Infatti

$$T_4 = T_3 \beta^{-\kappa} = T_1 \beta^{2\kappa} \beta^{-\kappa} = T_1 \beta^{\kappa} = T_2 \quad (13.43)$$

È possibile poi ripetere i calcoli considerando un ciclo ad aria, assumendo cioè variabili con la temperatura i calori specifici a pressione e volume costante ed eventualmente considerando le trasformazioni non isoentropiche. Dall'analisi fatta sembrerebbe conveniente operare con elevati rapporti di compressione  $\beta$  (in modo da massimizzare il rendimento) scegliendo poi la temperatura di picco del ciclo in modo tale da massimizzare anche il lavoro utile<sup>6</sup>. Chiaramente la temperatura di picco del ciclo è limitata per motivi di tecnologia dei materiali ( $T_3 < 1500$  K). Numerosi sono gli accorgimenti per evitare il surriscaldamento dei diffusori e dei primi stadi di turbina. Nei primi stadi di turbina di un turboreattore per aeromobile spesso si utilizza un raffreddamento a film d'aria soffiata da minuscoli fori localizzati in prossimità del bordo d'attacco delle pale. Inoltre anche nel caso in cui si considerino compressori assiali multistadio sono rare applicazioni in cui il  $\beta$  complessivo del compressore sia superiore a 20.

### 13.3.2 Ciclo reale

Il ciclo reale differisce dal ciclo ideale per diversi motivi. Fra i principali ricordiamo

1. La compressione e l'espansione non sono processi isoentropici, bensì sono adiabatici ed irreversibili, eventualmente caratterizzati in termini di rendimento isoentropico<sup>7</sup>. Si hanno pertanto delle perdite di carico che incrementano il lavoro di compressione e riducono quello di espansione a parità di rapporto di compressione del ciclo. In questo modo il lavoro utile si riduce rispetto al caso ideale.
2. La combustione non avviene a pressione costante. I motivi per cui ciò accade sono principalmente dovuti alle inevitabili perdite di carico in camera di combustione.

<sup>6</sup>La temperatura ottimale di ingresso in turbina per dato rapporto di compressione si ottiene da (13.42), cioè

$$T_3 = T_1 \beta^{2\kappa} \quad (13.44)$$

<sup>7</sup>Il rendimento isoentropico si può esprimere in termini di rendimento politropico e rapporto di compressione.

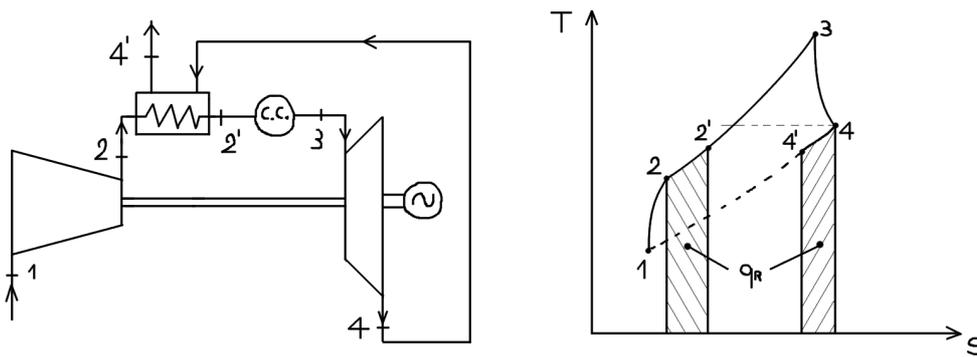


Figura 13.19: Rigenerazione termica in un turbogas.

Inoltre durante la combustione abbiamo formazione di altre specie chimiche con un valore di  $c_p$  differente e mediamente più elevato di quello dell'aria. Ciò significa che è necessario fornire una maggiore quantità di calore per realizzare lo stesso incremento di temperatura nel fluido motore. Inoltre i prodotti di combustione sono in grado di dissociarsi, assorbendo calore dal processo di combustione stesso.

### 13.3.3 Miglioramenti del circuito elementare

Il ciclo termodinamico elementare può essere apprezzabilmente migliorato impiegando opportuni accorgimenti. Nella pratica si considerano

- rigenerazione termica utilizzando il calore scaricato dalla turbina per preriscaldare il gas prima dell'ingresso in camera di combustione;
- compressione interrefrigerata;
- postcombustione;

**Rigenerazione termica** Il processo di rigenerazione termica consiste nell'utilizzare internamente al circuito del calore che altrimenti andrebbe disperso inutilmente. In figura 13.19 illustriamo lo schema di un impianto che utilizza il calore scaricato dalla turbina per preriscaldare i gas prima dell'ingresso in camera di combustione. I vantaggi da un punto di vista delle prestazioni sono immediatamente comprensibili. Il ciclo termodinamico ed in particolare il lavoro utile non viene alterato, mentre si ottengono effetti apprezzabili in termini di riduzione della quantità di calore da fornire al ciclo, dunque di rendimento. Infatti in camera di combustione si risparmia una quota di calore pari al calore di rigenerazione  $q_R$ , la qual cosa si traduce immediatamente in un risparmio di combustibile. Ovviamente possiamo preriscaldare al più fino alla temperatura di scarico della turbina. Per fissata  $T_1$  e  $T_3$  questo impone ovviamente limiti sul rapporto di compressione, come illustrato in figura 13.18. Nel caso di rigenerazione completa abbiamo  $T_4 = T_{2'}$  e  $T_{4'} = T_2$ . Se studiamo il rendimento del ciclo ideale completamente rigenerato troviamo che esso decresce in funzione del rapporto di compressione  $\beta$ . In particolare abbiamo

$$\epsilon_R = 1 - \frac{T_{4'} - T_1}{T_3 - T_{2'}} = 1 - \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_4} = 1 - \frac{T_1 T_2 / T_1 - 1}{T_3 (1 - T_4 / T_3)} = 1 - \frac{1}{\alpha} \frac{\beta^\kappa - 1}{1 - \beta^{-\kappa}} = 1 - \frac{\beta^\kappa}{\alpha} \quad (13.45)$$

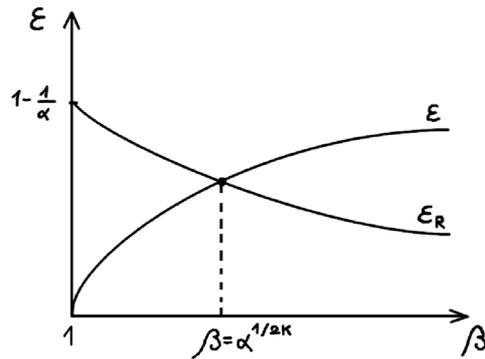


Figura 13.20: Confronto fra il rendimento di un ciclo di Brayton-Joule non rigenerato ed uno completamente rigenerato. Per  $\beta > \alpha^{1/2\kappa}$  il ciclo rigenerato ha rendimento minore dato che la temperatura di fine compressione è maggiore di quella di scarico della turbina.

Le curve di rendimento del ciclo completamente rigenerato e di quello non rigenerato si intersecano in corrispondenza di

$$\epsilon_R = \epsilon \Leftrightarrow \frac{\beta^\kappa}{\alpha} = \beta^{-\kappa} \Leftrightarrow \beta^* = \alpha^{\frac{1}{2\kappa}} \quad (13.46)$$

cioè per lo stesso valore del rapporto di compressione che massimizza il lavoro utile del ciclo non rigenerato. Per  $\beta > \beta^*$  il rendimento del ciclo non rigenerato è maggiore di quello rigenerato dato che in tali condizioni la temperatura di scarico della turbina è minore di quella di uscita dal compressore, dunque la rigenerazione in questo caso comporta una sottrazione di calore dal fluido prima della camera di combustione.

**Compressione interrefrigerata** La compressione interrefrigerata ha come obiettivo la minimizzazione del lavoro di compressione suddividendo la compressione stessa in due o più stadi fra i quali viene interposto uno scambiatore di calore. Chiaramente si ha un cospicuo risparmio di lavoro di compressione nel caso in essa sia compiuta a temperatura costante (vd. ciclo di Ericsson). Differentemente da quanto accade in un ciclo frigorifero, in cui il calore prelevato dall'evaporatore non è influenzato da come si realizza la compressione, l'interrefrigerazione in un ciclo turbogas penalizza il processo di combustione successivo dato che in camera di combustione arriva un fluido più freddo. Pertanto essa può portare ad una riduzione del coefficiente economico. Esiste una pressione ottimale di interrefrigerazione che minimizza il lavoro complessivo di compressione nei due stadi. Vediamo quanto vale questa pressione ottimale nel caso semplice di compressioni isoentropiche interrefrigerate con uno scambiatore di lunghezza infinita, cioè riportando il fluido alla temperatura di aspirazione del primo stadio prima di procedere alla compressione del secondo stadio. Detti  $l_1$  ed  $l_2$  questi lavori di compressione abbiamo

$$l_1 = c_p T_1 \left( \beta_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \quad \beta_1 = \frac{p_i}{p_1} \quad (13.47)$$

$$l_2 = c_p T_1 \left( \beta_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \quad \beta_2 = \frac{p_4}{p_i} \quad (13.48)$$

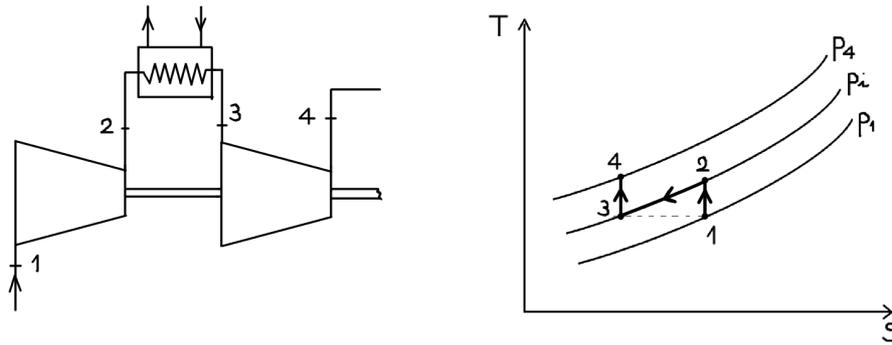


Figura 13.21: Compressione interrefrigerata ideale in un turbogas. Supponiamo che le due compressioni siano isoentropiche e che il fluido sia riportato alla temperatura  $T_1$  prima di entrare nel secondo compressore. In questo caso si dimostra che  $p_i = \sqrt{p_1 p_4}$  minimizza il lavoro di compressione totale.

Consideriamo il lavoro totale di compressione  $l_c = l_1 + l_2$ , adimensionalizzato con  $c_p T_1$

$$\frac{l_c}{c_p T_1} = \left( \beta_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) + \left( \beta_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \quad (13.49)$$

e minimizziamolo rispetto a  $p_i$ . Otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left( \frac{l_c}{c_p T_1} \right) = \kappa \beta_1^{\kappa-1} \frac{1}{p_1} - \frac{p_4}{p_i^2} \kappa \beta_2^{\kappa-1} = 0 \quad (13.50)$$

dalla quale risulta

$$\boxed{p_i = \sqrt{p_1 p_4}} \quad (13.51)$$

Dividendo il ciclo elementare ideale interrefrigerato in due sottocicli si dimostra che l'interrefrigerazione penalizza (nel caso ideale) il rendimento termodinamico (il calore da fornire al ciclo aumenta più velocemente del lavoro utile, che comunque cresce). Ciò non deve portare a concludere che la stessa cosa avviene anche nel ciclo reale. In effetti tutto dipende dalle condizioni in cui avviene l'interrefrigerazione. Se il rapporto di compressione fra cui opera l'interrefrigerazione non è elevato il rendimento migliora.

**Postcombustione** Un'altra strada per ottenere un miglioramento nella potenza utile consiste nel far avvenire una seconda combustione dopo un primo tratto di espansione. Gli eccessi d'aria con cui opera il turbogas consentono questo secondo processo di combustione. Valgono le stesse considerazioni fatte al riguardo della compressione interrefrigerata. Il rendimento termodinamico del ciclo ideale con postcombustione è minore di quello senza postcombustione. Non è detto che la stessa cosa avvenga nel caso di ciclo reale. In particolare se le postcombustioni sono molte e a pressione molto vicine fra loro (trasformazione *paraisoterma* si dimostra che il rendimento cresce. Di norma comunque un turbogas ha una sola postcombustione. Essa viene effettuata ad esempio per far fronte ad una richiesta di potenza che eccede una condizione di funzionamento nominale, specialmente in soluzioni turbogas bi-albero. Nel caso della propulsione aeronautica la post-combustione ha come obiettivo l'aumento della spinta e viene realizzata dopo lo scarico della turbina.

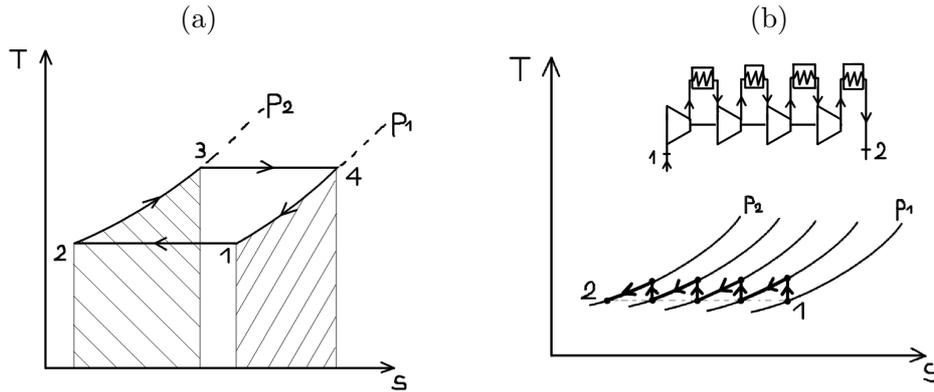


Figura 13.22: Ciclo di Ericsson teorico ( $q_{14} = q_{23}$ ) di un gas perfetto (a) e realizzazione di una compressione paroisoterma (b).

### 13.3.4 Ciclo di Ericsson

Utilizzando le idee della compressione iterrefrigerata e dell'espansione con post combustione possiamo pensare di realizzare un ciclo (di Ericsson) che si presta ad una *rigenerazione termica teoricamente completa*. In altre parole se disponiamo di un compressore e di una turbina in grado di realizzare trasformazioni *paroisoterme* possiamo utilizzare il calore scaricato dalla suddetta turbina per preriscaldare il fluido in uscita dal compressore. Questo preriscaldamento, nel caso ideale è sufficiente a riportare il fluido nelle condizioni che aveva prima di entrare in turbina. Nel caso ideale, il ciclo di Ericsson completamente rigenerato ha rendimento pari al ciclo di Carnot. Il rendimento si calcola facilmente caratterizzando le trasformazioni termodinamiche in termini di scambi termici

$$q_1 = c_p (T_3 - T_2) + \underbrace{RT_3 \ln(\beta)}_{T_3 \Delta s_{34}} \quad (13.52)$$

$$q_2 = c_p (T_4 - T_1) + \underbrace{RT_1 \ln(\beta)}_{T_1 \Delta s_{21}} \quad (13.53)$$

$$(13.54)$$

Si ottiene

$$\varepsilon = 1 - \frac{q_2}{q_1} = 1 - \frac{\alpha - 1 + \ln(\beta^\kappa)}{\alpha - 1 + \alpha \ln(\beta^\kappa)} \quad \alpha = \frac{T_3}{T_1} \quad \kappa = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \quad (13.55)$$

A parità di  $\alpha$  e  $\beta$  il ciclo di Ericsson ha rendimento minore di quello di Joule-Brayton. Tuttavia nel caso in cui si operi una rigenerazione il ciclo di Ericsson è in grado di avere dei rendimenti prossimi al ciclo di Carnot. Nel caso di rigenerazione completa il rendimento del ciclo di Ericsson teorico coincide con quello di Carnot

$$\varepsilon = 1 - \frac{q_2}{q_1} = 1 - \frac{T_1}{T_3} \quad (13.56)$$

Possiamo anche calcolarci esplicitamente il lavoro di espansione e di compressione impiegando l'equazione di bilancio integrale dell'energia meccanica

$$l_c = \int_1^2 v dp = RT_1 \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) \quad (13.57)$$

$$l_t = \int_3^4 v dp = RT_3 \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) \quad (13.58)$$

Il lavoro utile è ovviamente  $l_t - l_c$ , mentre il calore  $q_1$  viene fornito sia in camera di combustione (l'isobara  $\overline{23}$ ) che durante l'espansione (sequenza di postcombustioni necessarie per realizzare la paraisoterma  $\overline{34}$ ). Pertanto il rendimento sarà

$$\varepsilon = \frac{l_t - l_c}{q_1} = \frac{R(T_3 - T_1) \ln \beta}{c_p(T_3 - T_2) + RT_3 \ln \beta} = \frac{c_p T_1 (\alpha - 1) \ln \beta^\kappa}{c_p(T_3 - T_2) + c_p T_3 \ln \beta^\kappa} = \frac{(\alpha - 1) \ln \beta^\kappa}{\alpha - 1 + \alpha \ln \beta^\kappa} \quad (13.59)$$

In condizioni di rigenerazione completa, l'unico calore da fornire è quello necessario a realizzare l'espansione paraisoterma. In questo caso abbiamo il seguente coefficiente economico

$$\varepsilon = \frac{l_t - l_c}{q'_1} = \frac{R(T_3 - T_1) \ln \beta}{RT_3 \ln \beta} = 1 - \frac{T_1}{T_3} \quad (13.60)$$

coincidente con quello di un ciclo di Carnot.

## 13.4 Cicli combinati gas-vapore

Si tratta di impianti di potenza costituiti da due circuiti, uno a gas ed uno a vapore, che interagiscono energeticamente. Possiamo avere differenti schemi

1. Il ciclo a vapore utilizza il calore scaricato dalla turbina del tubogas in un generatore di vapore particolare detto *caldaia a recupero*. La temperatura di picco del ciclo a vapore è limitata da quella di scarico del turbogas.
2. Il generatore della centrale a vapore può alimentare entrambi i cicli termodinamici. In questo caso l'aria per la combustione nel generatore di vapore è fornita alla pressione di uscita del compressore del turbogas. Dunque il generatore di vapore stesso va pressurizzato. A combustione avvenuta i gas combusti vengono inviati in una turbina.
3. I gas di scarico della turbina sono utilizzati per preriscaldare l'acqua di alimento del generatore di vapore. Questa è la soluzione più diffusa.

Il calcolo del rendimento del ciclo combinato è abbastanza agevole. Se tutta la potenza scaricata da un ciclo viene utilizzata dall'altro abbiamo

$$\epsilon = \frac{L_1 + L_2}{q_1} = \frac{\varepsilon_1 q_1 + \varepsilon_2 q_2}{q_1} = \frac{\varepsilon_1 q_1 + \varepsilon_2 (1 - \varepsilon_1) q_1}{q_1} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 (1 - \varepsilon_1) \quad (13.61)$$

in cui  $q_1$  e  $q_2$  sono la potenza fornita e scaricata da uno dei due impianti ("topper"). Nel caso in cui vi sia un coefficiente di utilizzazione di potenza (ad esempio l'efficienza termica di una caldaia a recupero) la formula si complica un pochino. Il rapporto di potenza del ciclo combinato è

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{\varepsilon_2 q'_1}{\varepsilon_1 q_1} = \frac{\varepsilon_2 (1 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1} \quad (13.62)$$

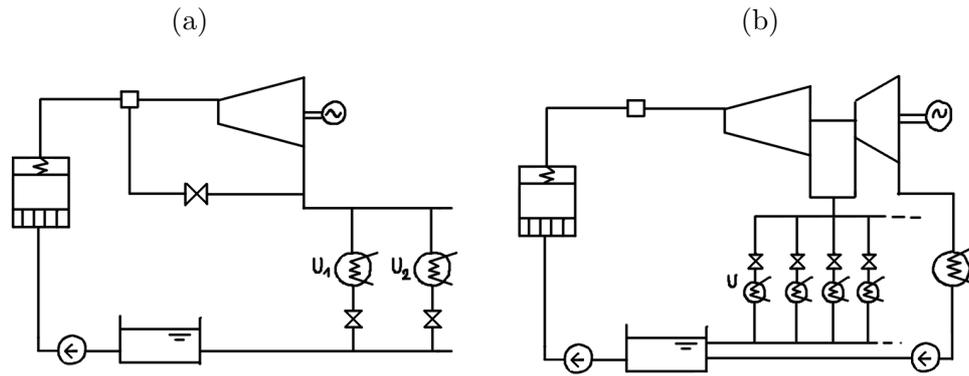


Figura 13.23: Schema di impianto di cogenerazione con turbina a vapore a contropressione (a) e a derivazione (b).

### 13.5 Impianti per cogenerazione

Il processo di cogenerazione è costituito dall'insieme delle operazioni volte alla produzione combinata di energia meccanica (elettrica) e termica, entrambi considerati *effetti utili*. Gli schemi impiantistici possibili sono molteplici. Ci limitiamo ad elencare i principali.

**Turbine a vapore a spillamento** Vengono impiegate in grandi installazioni in cui lo scopo principale è la produzione di energia elettrica, e l'importanza della produzione di calore è modesta. Il calore viene direttamente prelevato dalla turbina ad una certa pressione ed inviato all'utenza termica.

**Turbine a vapore a contropressione e ad estrazione** In questo caso l'impianto è privo di condensatore e la pressione minima del vapore è condizionata da quella dell'utilizzatore termico, che rappresenta in pratica il condensatore dell'impianto. Dipendentemente dall'entità della richiesta di energia termica ed elettrica possiamo avere diverse soluzioni: la turbina in contropressione e la turbina a derivazione.

**Turbine a gas a recupero di calore** I gas di scarico delle turbine hanno temperature intorno a  $500 \div 600^\circ\text{C}$ . Di norma tale calore viene recuperato attraverso uno scambiatore rigenerativo allo scarico di un tubogas che alimenta una rete di utenze termiche. Spesso si realizza una postcombustione dopo la turbina per integrare o fare fronte ad una richiesta di calore variabile. Gli schemi impiantistici per la cogenerazione con turbogas possono realizzare un ciclo aperto o un ciclo chiuso.

**Gruppi Diesel a recupero** Il recupero di calore dai motori Diesel per potenze fino a 40 MW avviene a due distinti livelli di temperatura: dai gas di scarico del motore ( $400 \div 500^\circ\text{C}$ ), dall'acqua e dall'olio di raffreddamento ( $90 \div 120^\circ\text{C}$ ).

**Impianti combinati gas-vapore** Possiamo eseguire una cogenerazione elettrica-termica anche impiegando un ciclo combinato gas-vapore.

## Capitolo 14

# Irraggiamento termico

Consideriamo la seguente esperienza. Prendiamo un solido a temperatura  $T_1$  e mettiamolo all'interno di una cavità chiusa le cui pareti sono mantenute ad una temperatura  $T_2$ . Facciamo il vuoto all'interno della cavità. L'esperienza mostra che il sistema raggiunge dopo un certo tempo l'equilibrio termico, la qual cosa suggerisce che è avvenuto un qualche scambio di energia fra il corpo all'interno della cavità e le pareti della cavità stessa. Inoltre tale scambio avviene in assenza di un mezzo interposto essendoci il vuoto nella cavità. Cioè non si tratta di conduzione e neanche di convezione, bensì di *irraggiamento termico*. Secondo questa teoria ogni corpo (gas, liquido o solido) che si trova ad una certa temperatura emette radiazione termica. L'origine di tale radiazione viene posta in relazione al moto di particelle cariche: molecole in un gas ionizzato, oscillazione di atomi attorno a posizioni equilibrio di un reticolo cristallino di un solido; moto di elettroni in banda di conduzione. La radiazione termica è fondamentalmente radiazione elettromagnetica. I fenomeni di *emissione* e di *propagazione* della radiazione sono stati studiati ed interpretati secondo teorie differenti, giungendo ad una soluzione soddisfacente nei primi del 900 con l'avvento dell'elettrodinamica quantistica. La radiazione termica si manifesta in una banda ben precisa dello spettro elettromagnetico (fra  $0.1 \div 100 \mu\text{m}$ ), che corrisponde a quella emessa ed assorbita dalla maggior parte corpi a temperature ragionevoli. Tale banda comprende l'infrarosso ( $0.76 \div 100 \mu\text{m}$ ), il visibile ( $0.4 \div 0.76 \mu\text{m}$ ) e parte dell'ultravioletto ( $0.1 \div 0.4 \mu\text{m}$ ).

Ma da dove viene questa radiazione? La provenienza è differente se si tratta di corpi *trasparenti* o corpi *opachi*. Nel primo caso il fenomeno è di tipo *volumetrico*, cioè la radiazione emessa da una certa entità localizzata all'interno del corpo ha una buona probabilità di raggiungere l'osservatore senza essere assorbita da qualche altra entità<sup>1</sup>. Per quanto riguarda corpi opachi l'emissione è di tipo prevalentemente *superficiale* ed avviene in uno strato dell'ordine del  $\mu\text{m}$ . Infatti la radiazione emessa internamente da una qualche entità viene riassorbita con grande probabilità dalle entità circostanti in un raggio sempre dell'ordine del  $\mu\text{m}$ . In questo capitolo ci occupiamo di radiazione termica emessa ed assorbita da corpi opachi, cioè fenomeni radiativi superficiali. Faremo qualche cenno

---

<sup>1</sup>Talvolta l'onda elettromagnetica generata dall'accelerazione di una particella carica viene detta radiazione di Brehemstralung. Tale fenomeno è fondamentalmente dovuto alla velocità di propagazione finita del campo elettromagnetico. Una carica accelerata è in grado di compiere del lavoro nel suo stesso campo (*self-interaction*) proprio perché "l'informazione" che identifica le nuove linee di flusso del campo si propaga a velocità finita.

all'emissione ed all'assorbimento di radiazione termica in corpi trasparenti (gas, liquidi) alla fine del capitolo.

## 14.1 La radiazione del corpo nero

Sperimentalmente si osserva che la potenza emessa per irraggiamento termico da una superficie di un corpo opaco dipende dal materiale del corpo, dalla sua temperatura e dallo stato della superficie (rugosità, presenza di materiale depositato, ecc...). Corpi differenti alla stessa temperatura emettono in modo differente. È molto conveniente allora definire una ente ideale, il *corpo nero*, a cui riferire tutte le proprietà radiative delle superfici reali. Il corpo nero è una astrazione teorica<sup>2</sup> che per lo studio dei fenomeni di irraggiamento termico ha la stessa utilità che ha il ciclo di Carnot per lo studio dei cicli termodinamici.

Il corpo nero è un perfetto emettitore ed assorbitore di radiazione elettromagnetica, nel senso che per fissata temperatura esso emette la massima potenza possibile per ogni lunghezza d'onda ed assorbe tutta la radiazione che incide su esso. Inoltre la radiazione emessa è *isotropa*, per definizione. La domanda successiva è ovviamente: ma quanto emette sto corpo nero? Lo studio della radiazione del corpo nero procurò notti insonni a molti fisici della fine dell'ottocento. Gli esperimenti condotti dall'austriaco Joseph Stefan (1879) su una cavità annerita con nerofumo suggerivano la relazione

$$q_0 = \sigma_0 T^4 \quad \sigma_0 = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4) \quad (14.1)$$

Successivamente (1884) Ludwig Boltzmann, uno studente di Joseph Stefan, dimostrò teoricamente la relazione sperimentale (14.1) utilizzando degli argomenti di natura puramente termodinamica<sup>3</sup>.

Erano gli anni di avvento della teoria di Maxwell dell'elettromagnetismo, e la natura elettromagnetica della radiazione termica era stata ben compresa. Si tentò pertanto di ottenere risultati quantitativi applicando le equazioni di Maxwell. I primi a provarci furono Rayleigh (1900) e Jeans (1905) (circa 15 anni dopo la determinazione sperimentale di Stefan). Essi utilizzarono la meccanica statistica per eseguire medie di insieme su un numero molto grande di oscillatori elementari costituiti da particelle cariche in grado di emettere energia elettromagnetica secondo uno spettro continuo<sup>4</sup>. Dai loro calcoli risultò

$$\varepsilon(\lambda, T) = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4} \quad \text{W}/(\text{m}^2 \mu\text{m}) \quad (14.2)$$

Per  $\lambda \rightarrow 0$  la densità spettrale di potenza se ne andava ad infinito (il fenomeno venne definito "catastrofe ultravioletta"), e analogo sorte toccava alla potenza emessa per unità

---

<sup>2</sup>È tuttavia possibile realizzare praticamente un "corpo nero" con buona approssimazione. A tal fine è sufficiente considerare una cavità chiusa annerita internamente con nero fumo. Se pratichiamo un piccolo foro nella cavità abbiamo che la radiazione emessa dipenderà solo dalla temperatura della cavità. Un corpo nero apparirebbe certamente nero alla vista poiché non riflette nulla; in particolare non riflette la banda di radiazione visibile. Vi sono corpi che visibilmente sono di colore non nero e che si comportano come corpi neri per altre parti dello spettro elettromagnetico. È il caso della pittura bianca e della neve, che sono degli eccellenti assorbitori di radiazione infrarossa.

<sup>3</sup>L'argomentazione di Boltzmann era basata su un ipotetica macchina termica che impiegava la luce come fluido motore e che operava secondo un ciclo di Carnot.

<sup>4</sup>Chiaramente una relazione fra la frequenza di oscillazione della particella carica (collegata alla temperatura) e la lunghezza d'onda della radiazione emessa. Inoltre tale energia dipende dal quadrato dell'ampiezza dell'onda e l'ampiezza è collegata alla frequenza di oscillazione.

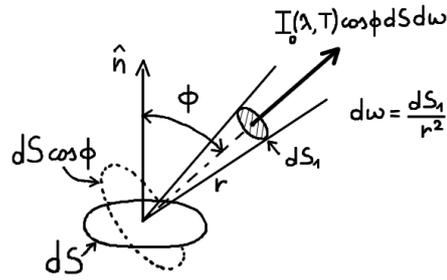


Figura 14.1: Radiazione emessa da un elemento di superficie  $dS$  nella direzione individuata dall'angolo solido  $d\omega$ .

di superficie

$$q = \int_0^{\infty} \varepsilon(\lambda, T) d\lambda = \left[ -\frac{10\pi ckT}{\lambda^5} \right]_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} = \infty \quad (14.3)$$

A questo punto le cose erano 2: o la teoria elettromagnetica di Maxwell era sbagliata, o tale teoria non era in grado di spiegare i fenomeni di emissione di radiazione termica del corpo nero. Viste le numerose conferme sperimentali della teoria di Maxwell si accettò che questo nuovo fenomeno era inspiegabile con l'elettrodinamica classica e si cercarono delle soluzioni alternative. Il problema del corpo nero diede un grosso impulso allo sviluppo della meccanica quantistica ed esso fu completamente risolto da Planck nel 1901 con questo nuovo tipo di meccanica.

### 14.1.1 Intensità spettrale di radiazione: la legge di Planck

L'intensità spettrale di radiazione del corpo nero  $I_0(\lambda, T)$  rappresenta la potenza emessa in una certa direzione dall'unità di superficie ortogonale a tale direzione attraverso un angolo solido unitario. Utilizzando la meccanica quantistica Planck determinò nel 1901 che nel vuoto doveva risultare

$$I_0(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5 [e^{hc/(\lambda kT)} - 1]} \quad \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \mu\text{m sr}} \quad (14.4)$$

dunque una intensità di radiazione *isotropa*. Per quantificare gli angoli solidi  $d\omega = dS/r^2$  è molto conveniente utilizzare un sistema di coordinate sferico. In esso è facile determinare che

$$d\omega = \frac{r \sin \phi d\vartheta r d\phi}{r^2} = \sin \phi d\vartheta d\phi \quad (14.5)$$

in cui  $\phi$  è l'angolo fra la generica direzione e la normale alla superficie. Se consideriamo una superficie nera piana orizzontale, possiamo calcolarci l'emissività emisferica spettrale,

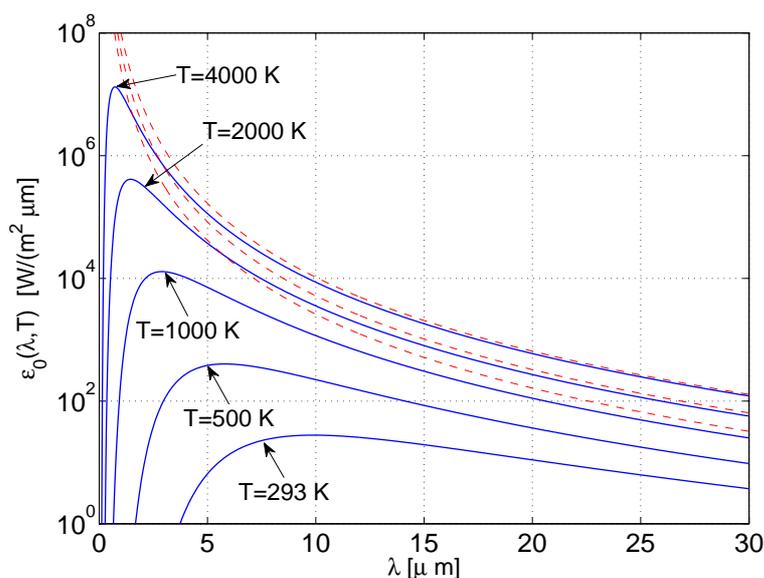


Figura 14.2: Potere emissivo monocromatico per un corpo nero secondo Planck (-) e secondo Rayleigh-Jeans (---).

cioè la potenza emessa dall'unità di superficie nera in un semispazio, risolvendo l'integrale

$$\begin{aligned}
 \epsilon_0(\lambda, T) &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_0(\lambda, T) \cos \phi \sin \phi d\vartheta d\phi \\
 &= 2\pi I_0(\lambda, T) \int_0^{\pi/2} \cos \phi \sin \phi d\phi \\
 &= 2\pi I_0(\lambda, T) \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \phi \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \pi I_0(\lambda, T)
 \end{aligned} \tag{14.6}$$

La quantità  $\epsilon_0(\lambda, T)$  si dice anche potere emissivo monocromatico della superficie nera. Impiegando la formula di Planck per l'intensità spettrale di radiazione troviamo

$$\boxed{\epsilon_0(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 [e^{hc/(\lambda kT)} - 1]} \quad \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \mu\text{m}}} \tag{14.7}$$

Per  $\lambda$  grande possiamo sviluppare l'esponenziale che compare al denominatore in serie di potenze intorno a 0 ottenendo

$$\epsilon_0(\lambda, T) \simeq \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 [1 + hc/(\lambda kT) - 1 + o(1/\lambda)]} = \frac{2\pi k c T}{\lambda^4} \tag{14.8}$$

cioè la legge di Rayleigh-Jeans. Questo risultato ci dice che *gli effetti della quantizzazione del fenomeno di emissione della radiazione termica* sono determinanti alle alte energie (onde corte) e del tutto trascurabili alle basse energie (onde lunghe). Il grafico del potere emissivo monocromatico di una superficie nera è illustrato in figura 14.2. I punti di

$T$ [°C]	$q_0(T)$ [kW/m <sup>2</sup> ]
20	0.418
100	1.098
500	20.244
1000	148.901

Tabella 14.1: Relazione fra la temperatura e la potenza specifica emessa per irraggiamento termico da una superficie nera in un semispazio.

massimo possono essere calcolati semplicemente considerando la condizione  $\partial\epsilon_0/\partial\lambda = 0$ , che fornisce l'equazione trascendentale

$$5(e^z - 1) = ze^z \quad z = \frac{hc}{k\lambda T} \quad (14.9)$$

Lo zero si determina numericamente e vale  $z^* = 4.9651$ . Otteniamo infine

$$\lambda_{\max}T = \frac{hc}{z^*k} = \frac{14387}{4.9651} \mu\text{m}\cdot\text{K} = 2897.6 \mu\text{m}\cdot\text{K} \quad (\text{legge di Wien}) \quad (14.10)$$

### 14.1.2 Legge di Stefan-Boltzmann

Integriamo su tutto lo spettro il potere emissivo monocromatico di una superficie orizzontale nera a temperatura fissata

$$\begin{aligned} q_0(T) &= \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 [e^{hc/(\lambda kT)} - 1]} d\lambda \quad (\text{poniamo } \lambda T = z) \\ &= T^4 \int_0^\infty \underbrace{\frac{2\pi hc^2}{z^5 [e^{hc/(zk)} - 1]} dz}_{\sigma_0} \\ &= \sigma_0 T^4 \end{aligned} \quad (14.11)$$

Ritroviamo così la legge di Stefan-Boltzmann

$$\boxed{q_0(T) = \sigma_0 T^4 \quad \frac{\text{W}}{\text{m}^2}} \quad (14.12)$$

ove  $\sigma_0 = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4)$  è chiamata costante di Stefan-Boltzmann. Pertanto attraverso la quantizzazione dell'energia emessa dagli oscillatori elementari, Planck (1901) riuscì ad ottenere teoricamente la formula ricavata sperimentalmente da Joseph Stefan nel 1879. Inoltre dato che il potere emissivo monocromatico non dipende dalla direzione è facile concludere che per ogni steradiante otteniamo la potenza specifica

$$\boxed{I_0(T) = \frac{1}{\pi} q_0(T) \quad \frac{\text{W}}{\text{sr m}^2}} \quad (14.13)$$

## 14.2 Radiazione emessa da una superficie reale

La radiazione termica emessa da una superficie reale che si trova alla temperatura  $T$  è sempre minore di quella emessa dal corpo nero alla stessa temperatura. Questo vale sia in

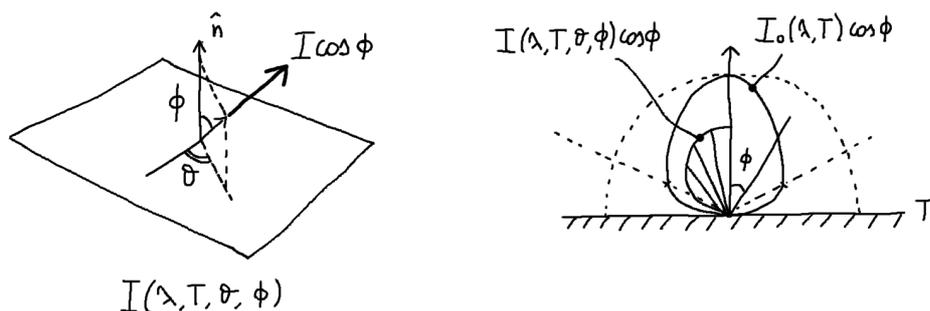


Figura 14.3: Intensità di radiazione emessa da una superficie reale. Per definizione  $I(\lambda, T, \vartheta, \phi)$  è la potenza emessa per unità di area e steradiante per cui quando valutiamo il contributo in una certa direzione occorre proiettare la superficie emittente sul piano ortogonale a tale direzione ottenendo  $I \cdot \cos \phi$ .

un senso integrale che per ogni lunghezza d'onda. Inoltre la radiazione emessa da una superficie reale in generale non è isotropa. Pertanto l'intensità monocromatica di radiazione in questo caso è una funzione di  $\phi$  e  $\vartheta$ . Per calcolare il potere emissivo monocromatico (emisferico) occorre integrare la funzione  $I(\lambda, T, \vartheta, \phi) \cos \phi$  in un semispazio. Al solito, utilizziamo coordinate sferiche e scriviamo l'angolo solido elementare come

$$d\omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{r^2 \sin \phi d\vartheta d\phi}{r^2} = \sin \phi d\vartheta d\phi \quad (14.14)$$

Otteniamo la relazione

$$\varepsilon(\lambda, T) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I(\lambda, T, \vartheta, \phi) \sin \phi \cos \phi d\vartheta d\phi \quad (14.15)$$

Se la radiazione è *isotropa*, possiamo portare fuori l'intensità di radiazione dall'integrale, ottenendo il potere emissivo monocromatico emisferico

$$\varepsilon(\lambda, T) = \pi I(\lambda, T) \quad (14.16)$$

in cui  $I < I_0$ .

### 14.3 Proprietà radiative delle superfici

Per corpi opachi il meccanismo di emissione ed assorbimento della radiazione termica è un fenomeno superficiale. Pertanto parleremo di proprietà radiative superficiali. È utile riferire tali proprietà in relazione a quelle del corpo nero che, ricordiamo, rappresenta una entità ideale in grado di assorbire tutta la radiazione incidente ed emettere isotropicamente la massima intensità radiazione per ogni temperatura ed ogni lunghezza d'onda. Chiaramente vi sono molti modi per raffrontare il comportamento radiativo di una superficie reale a quella della corrispondente superficie ideale nera. Ad esempio possiamo considerare un coefficiente di *emissività monocromatica* definito come rapporto fra i poteri

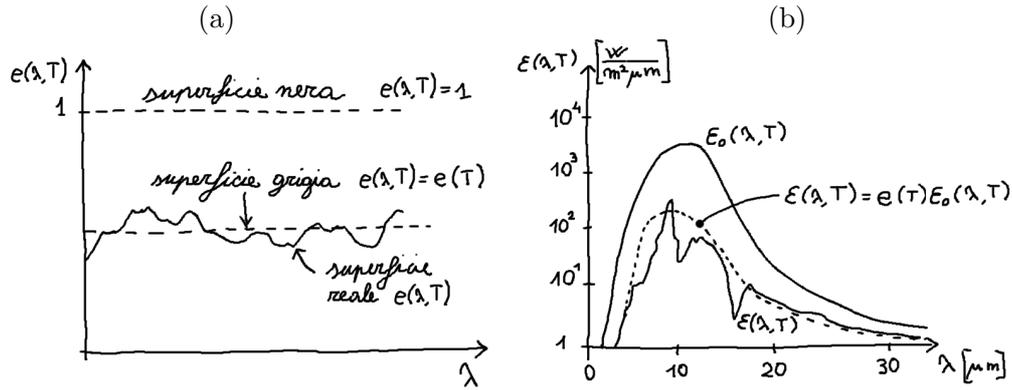


Figura 14.4: Emissività monocromatica (a) e potere emissivo monocromatico (b) di una superficie reale e di una superficie nera, entrambe a temperatura  $T$  fissata. In figura è mostrata anche l'approssimazione di superficie grigia.

emissivi monocromatici della superficie reale e di quella nera

$$e(\lambda, T) := \frac{\varepsilon(\lambda, T)}{\varepsilon_0(\lambda, T)} \quad (14.17)$$

Alternativamente possiamo considerare un secondo coefficiente di *l'emissività emisferica totale*

$$e_1(T) := \frac{\int_0^\infty \varepsilon(\lambda, T) d\lambda}{\sigma_0 T^4} \quad (14.18)$$

oppure anche una *emissività monocromatica direzionale* definita come rapporto fra le intensità di radiazione della superficie reale e della superficie ideale nera

$$e_2(\lambda, T, \vartheta, \phi) := \frac{I(\lambda, T, \vartheta, \phi)}{I_0(\lambda, T)} \quad (14.19)$$

Nel caso in cui la radiazione emessa dalla superficie reale sia isotropa abbiamo

$$e_2(\lambda, T) := \frac{I(\lambda, T)}{I_0(\lambda, T)} \quad (14.20)$$

### 14.3.1 Emissività

Si definisce emissività di una superficie il rapporto fra la radiazione emessa dalla superficie e la radiazione emessa da una superficie nera che si trova alla stessa temperatura. Come abbiamo appena visto, possiamo avere diversi tipi di coefficienti. Per superfici *uniformemente diffondenti* la radiazione è isotropa, dunque  $e_2(\lambda, T, \vartheta, \phi) \equiv e(\lambda, T)$ <sup>5</sup>.

In figura 14.4 è riportato il grafico dell'emissività monocromatica  $e(\lambda, T)$  e del potere emissivo monocromatico  $\varepsilon(\lambda, T)$  per una superficie reale ed una superficie nera che si trova alla stessa temperatura. In tale figura riportiamo anche l'approssimazione di *superficie*

<sup>5</sup>Per dimostrarlo è sufficiente ricordare che  $\varepsilon(\lambda, T) = \pi I(\lambda, T)$ ,  $\varepsilon_0(\lambda, T) = \pi I_0(\lambda, T)$ , da cui

$$e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\pi I}{\pi I_0} = \frac{I}{I_0} = e_2 \quad (14.21)$$

*grigia*. In pratica l'approssimazione di superficie grigia consiste nel considerare l'emissività monocromatica della superficie reale ad una certa temperatura indipendente dalla lunghezza d'onda. Questa assunzione semplifica molto i calcoli di irraggiamento termico. Infatti utilizzando l'approssimazione di superficie grigia possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
 q(T) &= \int_0^{\infty} \varepsilon(\lambda, T) d\lambda \\
 &= \int_0^{\infty} e(\lambda, T) \varepsilon(\lambda, T) d\lambda \quad (e(\lambda, T) \equiv e(T)) \\
 &= e(T) \int_0^{\infty} \varepsilon_0(\lambda, T) d\lambda \\
 &= e(T) \sigma_0 T^4
 \end{aligned} \tag{14.22}$$

Dunque, per una superficie grigia uniformemente diffondente

$$\boxed{q(T) = e(T) \sigma_0 T^4} \tag{14.23}$$

### 14.3.2 Coefficienti di assorbimento, riflessione e trasmissione

Nella precedente sezione abbiamo caratterizzato l'emissione di radiazione termica da una superficie reale uniformemente diffondente utilizzando il coefficiente di emissività monocromatica. Chiaramente se tale superficie è posta in un ambiente in cui vi sono altri corpi che irradiano essa riceverà radiazione termica. Il comportamento radiativo di una superficie colpita da radiazione termica incidente può essere macroscopicamente caratterizzato in termini di coefficienti di assorbimento, riflessione e trasmissione. Tali coefficienti sono definiti come frazione di energia assorbita, riflessa e trasmessa rispetto alla totale incidente. Si definisce *irradiazione*  $G$  la potenza totale specifica (per unità di area) incidente sulla superficie. Se eseguiamo una analisi spettrale dell'irradiazione avremo uno spettro di potenza  $E(\lambda)$  tale che

$$G = \int_0^{\infty} E(\lambda) d\lambda \tag{14.24}$$

Chiaramente  $E(\lambda) d\lambda$  rappresenta la potenza specifica incidente nella banda di lunghezze d'onda comprese fra  $\lambda$  e  $\lambda + d\lambda$ . Tale potenza viene in parte assorbita, in parte trasmessa ed in parte riflessa secondo la relazione

$$E(\lambda) d\lambda = [E_a(\lambda, T) + E_r(\lambda, T) + E_t(\lambda, T)] d\lambda \tag{14.25}$$

Ovviamente lo spettro di irradiazione  $E(\lambda)$  non dipende dalla temperatura della superficie su cui incide la radiazione. Semmai esso dipenderà dalla temperatura della superficie che ha emesso la radiazione incidente. Si capisce pertanto come le proprietà di assorbimento e trasmissione possano dipendere sia dalla temperatura della superficie che riceve la radiazione sia dalla temperatura della superficie che ha emesso la radiazione incidente.

Una superficie reale assorbe solo una parte della radiazione incidente (contrariamente a quanto avviene per una superficie nera) e preferenzialmente solo alcune lunghezze d'onda<sup>6</sup>. Considerando la possibilità che l'irradiazione sia emessa da una superficie posta a temperatura  $T_1$ , definiamo il coefficiente di *assorbimento monocromatico emisferico*

$$a(\lambda, T) := \frac{E_a(\lambda, T)}{E(\lambda)} \tag{14.26}$$

---

<sup>6</sup>È il caso della pittura bianca che assorbe molto l'infrarosso ma non il visibile.

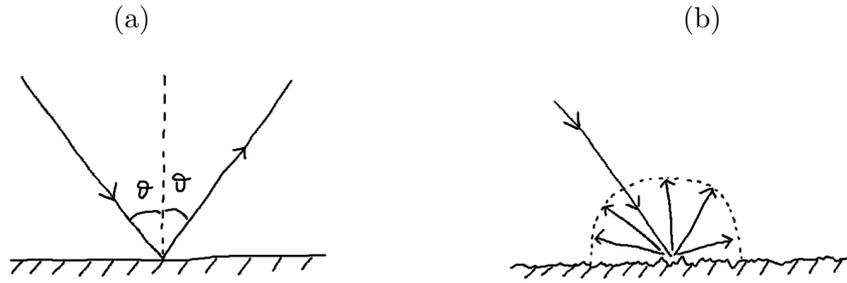


Figura 14.5: Riflessione su una superficie speculare (a). Radiazione uniformemente diffusa per riflessione su una superficie rugosa (b).

analogamente definiamo i coefficienti monocromatici emisferici di riflessione e trasmissione

$$r(\lambda, T) := \frac{E_r(\lambda, T)}{E(\lambda)} \quad (14.27)$$

$$t(\lambda, T) := \frac{E_t(\lambda, T)}{E(\lambda)} \quad (14.28)$$

L'equazione (14.25) può anche scriversi in termini spettrali come

$$1 = a(\lambda, T) + r(\lambda, T) + t(\lambda, T) \quad (14.29)$$

Per corpi opachi abbiamo che il coefficiente di trasmissione è nullo. Pertanto otteniamo

$$1 = a(\lambda, T) + r(\lambda, T) \quad (14.30)$$

**Osservazione** Possiamo anche definire dei coefficienti monocromatici *direzionali* di assorbimento, riflessione e trasmissione, considerando cioè la possibilità di comportamento radiativo *non isotropo* della superficie. Ad esempio una riflessione speculare è ovviamente non isotropa dato che la radiazione incidente viene riflessa in una direzione ben precisa secondo le leggi dell'ottica geometrica.

Nel caso in cui la radiazione incidente sia emessa da una superficie che si trova ad una certa temperatura avremo un coefficiente di assorbimento che *dipende dalla temperatura della sorgente che ha emesso la radiazione incidente*. Per spiegare questo fatto notiamo che la frazione di potenza emessa dalla superficie 2 che incide sulla superficie 1 (vd. §14.4) è

$$E(\lambda, T_2) d\lambda = F_{21} \varepsilon_2(\lambda, T_2) d\lambda \quad (14.31)$$

Dunque l'assorbimento monocromatico della superficie 1 dipende sia dalle proprietà della superficie 1 che da quelle della superficie 2 ed in particolare dalla sua temperatura  $T_2$ . Infatti

$$a(\lambda, T_1, T_2) := \frac{E_a(\lambda, T_1)}{E(\lambda, T_2)} \quad (14.32)$$

Sperimentalmente si osserva che il coefficiente di assorbimento dipende molto poco dalla temperatura della superficie che viene irradiata, mentre dipende molto dalla temperatura



Figura 14.6: All'equilibrio termico la superficie reale del corpo all'interno della cavità presenta una emissività monocromatica pari all'assorbimento monocromatico. La dimostrazione rigorosa di questo fatto è complicata.

di quella che irradia. Ciò significa che una superficie ad una certa temperatura avrà diversi coefficienti di assorbimento se la radiazione che incide su essa proviene da corpi a temperatura differente.

### 14.3.3 Legge di Kirchhoff

A livello microscopico, l'emissione e l'assorbimento di radiazione sono fenomeni che coinvolgono gli stessi soggetti. Viene perciò naturale chiedersi se vi sia una relazione fra le proprietà emissive e quelle di assorbimento. Consideriamo una cavità isoterma costituita da superfici nere al cui interno poniamo un corpo opaco. All'equilibrio termico avremo che la potenza emessa per irraggiamento termico dalla superficie del corpo alla temperatura  $T$  equivale a quella assorbita, sempre alla stessa temperatura. Supponiamo che la superficie del corpo interno sia uniformemente diffondente. Per la banda di lunghezze d'onda che va da  $\lambda$  a  $\lambda + d\lambda$  abbiamo il bilancio di potenza specifica

$$\underbrace{e(\lambda, T) \sigma_0 T^4 d\lambda}_{\text{emessa}} = \underbrace{a(\lambda, T) \sigma_0 T^4 d\lambda}_{\text{assorbita}} \quad (14.33)$$

Notiamo che la radiazione assorbita dipende dalla temperatura della superficie che genera la radiazione incidente, in questo caso la superficie nera della cavità. Poiché tale superficie è alla stessa temperatura del corpo che si trova all'interno dalla (14.33) abbiamo

$$\boxed{e(\lambda, T) = a(\lambda, T)} \quad (14.34)$$

**Osservazione** In realtà occorre fare un po' di attenzione al calcolo della radiazione termica incidente. In effetti un elemento di area appartenente alla superficie del corpo interno "vede" una certa parte della superficie della cavità. Inoltre la cavità è in grado di irradiare se stessa. Pertanto una dimostrazione rigorosa della legge di Kirchhoff deve impiegare i fattori di vista. Con riferimento alla figura 14.6(b) notiamo che la potenza proveniente da

un elemento di area della cavità nera ed incidente su un elemento di superficie del corpo interno in generale *potrebbe non essere uguale* a quella che tale elemento rimanda indietro nella stessa direzione da cui è arrivata la radiazione incidente!. Se essa fosse uguale si avrebbe molto semplicemente

$$a(\lambda, T) dS_2 I_0(\lambda, T) \cos \phi_2 \frac{dS_1 \cos \phi_1}{r^2} = e(\lambda, T) dS_1 I_0 \cos \phi_1 \frac{dS_2 \cos \phi_2}{r^2} \quad (14.35)$$

dalla quale

$$a(\lambda, T) = e(\lambda, T) \quad (14.36)$$

Purtroppo però (14.35) è una assunzione molto forte che, in generale, non è verificata. Un calcolo rigoroso deve considerare la potenza totale monocromatica proveniente da tutte le direzioni possibili ed incidente su  $dS_1$ . Tale potenza viene assorbita e deve essere pari a quella emessa da  $dS_1$  in tutte le direzioni possibili. Da questo schema, aggiungendo qualche ipotesi extra, deve potersi determinare  $a = e$ .

In ogni caso, se assumiamo verificata la legge di Kirchhoff riusciamo a descrivere tutte le proprietà radiative di una superficie reale di un corpo opaco attraverso *un solo parametro* e questa circostanza semplifica molto i calcoli di irraggiamento termico.

## 14.4 Fattori di vista

Nei problemi di scambio termico per irraggiamento fra più superfici ci troviamo spesso di fronte alla necessità di doverci calcolare quale frazione di potenza emessa o riflessa da una certa superficie incide su un'altra. Tale concetto ci porta naturalmente a quello di “fattore di vista” che rappresenta pertanto un coefficiente in grado di tenere conto degli effetti di una orientazione arbitraria delle superfici che si scambiano radiazione termica. Si parla di “fattore di vista” poiché la radiazione elettromagnetica segue le leggi dell'ottica geometrica. Nella determinazione analitica dell'espressione del fattore di vista faremo riferimento esclusivamente al caso di superfici *uniformemente diffondenti* sia per quanto riguarda l'emissione sia per la riflessione della radiazione termica.

### 14.4.1 Fattore di vista diffuso fra due superfici elementari

Consideriamo le due superfici 1 e 2 illustrate in figura 14.7. Assumiamo che tali superfici siano *uniformemente diffondenti* sia per quanto riguarda l'emissione sia per la riflessione di radiazione termica. In tali ipotesi la potenza che lascia l'elemento infinitesimo  $dS_1$  per incidere su  $dS_2$  è

$$dQ_{12} = dS_1 J_1(T) \cos \phi_1 d\omega_{12} \quad (14.37)$$

in cui  $J_1(T)$  è l'intensità di radiosità<sup>7</sup>

$$J_1(T) = \int_0^\infty \mathcal{J}_1(\lambda, T) d\lambda \quad (14.38)$$

L'angolo solido  $d\omega_{12}$  si ottiene considerando la proiezione della superficie  $dS_2$  nel piano ortogonale alla direzione  $\overline{12}$

$$d\omega_{12} = \frac{dS_2 \cos \phi_2}{r^2} \quad (14.39)$$

---

<sup>7</sup>Si definisce radiosità di una superficie la potenza totale che lascia la superficie. In generale tale potenza si compone di un termine *emesso* dalla superficie alla temperatura  $T$  e da uno *riflesso*.

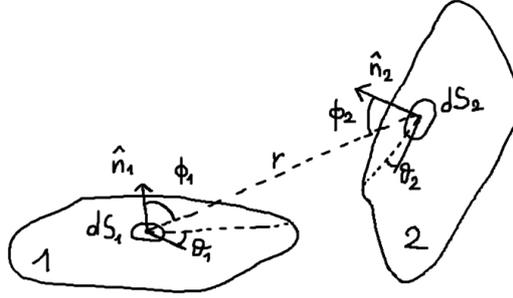


Figura 14.7: Coordinate per la definizione del fattore di vista.

$$dQ_{12} = J_1(T) \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2}{r^2} dS_1 dS_2 \quad (14.40)$$

La potenza che viene irradiata *isotropicamente* dall'elemento di area  $dS_1$  in un semispazio è

$$dQ_1 = dS_1 J_1(T) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \phi_1 \sin \phi_1 d\vartheta d\phi_1 = dS_1 \pi J_1(T) \quad (14.41)$$

Per definizione, il *fattore di vista* fra gli elementi di area  $dS_1$  e  $dS_2$  è dato dal rapporto fra la potenza totale che lascia  $dS_1$  per incidere su  $dS_2$  e la potenza totale che lascia la superficie  $dS_1$ . Cioè

$$dQ_{12} = dQ_1 F_{dS_1-dS_2} \quad (14.42)$$

Sostituendo le espressioni (14.41) e (14.40) in (14.42) troviamo

$$F_{dS_1-dS_2} := \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2}{\pi r^2} dS_2 \quad (14.43)$$

Analogamente è facile dimostrare

$$F_{dS_2-dS_1} := \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2}{\pi r^2} dS_1 \quad (14.44)$$

Dunque

$$dS_2 F_{dS_2-dS_1} = dS_1 F_{dS_1-dS_2} \quad (\text{relazione di reciprocità}) \quad (14.45)$$

#### 14.4.2 Fattore di vista diffuso fra due superfici finite

Per ottenere il fattore di vista fra due superfici finite è sufficiente integrare le espressioni (14.40), (14.41), e farne il rapporto

$$F_{12} = \frac{Q_{12}}{Q_1} = \frac{1}{S_1 \pi} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2}{r^2} dS_1 dS_2 \quad (14.46)$$

$$F_{21} = \frac{Q_{21}}{Q_2} = \frac{1}{S_2 \pi} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2}{r^2} dS_1 dS_2 \quad (14.47)$$

Evidentemente

$$S_1 F_{12} = S_2 F_{21} \quad (\text{relazione di reciprocità}) \quad (14.48)$$

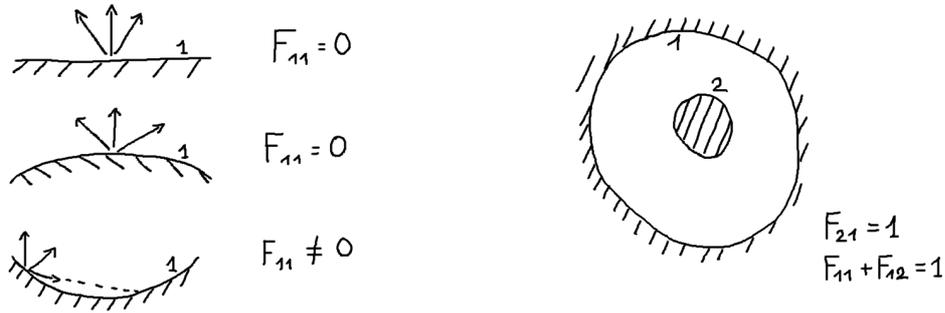


Figura 14.8: Alcune proprietà dei fattori di vista.

### 14.4.3 Proprietà dei fattori di vista

In figura 14.8 sono illustrate alcune proprietà dei fattori di vista. Per un insieme di  $N$  superfici di area  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  i fattori di vista  $F_{ij}$  soddisfano la *relazione reciprocità*

$$\boxed{S_i F_{ij} = S_j F_{ji}, \quad \forall i, j = 1, \dots, N} \quad (14.49)$$

Inoltre se le superfici costituiscono una cavità chiusa allora la potenza che lascia una certa superficie  $i$  può incidere solo sulle altre superfici

$$Q_i = \sum_{j=1}^N Q_{ij} \quad (14.50)$$

Chiaramente qualche  $Q_{ij}$  può essere nullo se la superficie  $i$  non vede la  $j$ . In ogni caso (14.50), dividendo per  $Q_i$  è facile determinare la *regola della somma*

$$\boxed{\sum_{j=1}^N F_{ij} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, N} \quad (14.51)$$

Dalla regola della somma segue la *regola della sovrapposizione*: se una superficie viene divisa in più parti possiamo ripartire la potenza ricevuta dalla superficie fra le sue sotto-superfici. Così se ad esempio la superficie 2 viene divisa in due superfici  $2_a$  e  $2_b$  allora è facile calcolare che

$$\boxed{F_{12} = F_{12_a} + F_{12_b}} \quad (14.52)$$

### 14.4.4 Metodi per la determinazione dei fattori di vista

Per determinare i fattori di vista bisogna essere abbastanza bravi da sapersi risolvere degli integrali nella forma

$$F_{ij} = \frac{1}{\pi S_i} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos \phi_i \cos \phi_j}{r^2} dS_i dS_j \quad (14.53)$$

Questo nella pratica si riesce a fare solo per alcune geometrie relativamente semplici. In ogni caso possiamo comunque risolvere l'integrale per via numerica. Vi sono tuttavia alcuni metodi semplificati che permettono di determinare  $F_{ij}$  in modo molto semplice.

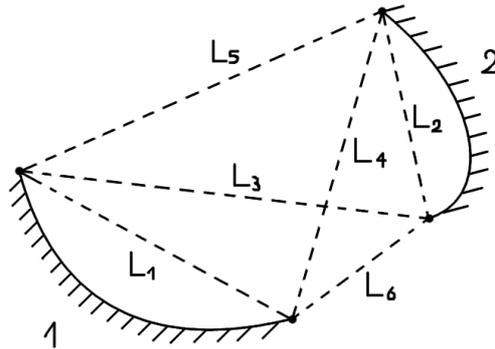


Figura 14.9: Metodo delle corde) per la determinazione del fattore di vista in geometrie bidimensionali.

### Metodo delle corde incrociate (Hottel)

Per cavità bidimensionali, quali possono essere, ad esempio, quelle costituite da tubi lunghe in una certa direzione  $H$ . E. Hottel ha mostrato nel 1950 che è possibile calcolarsi il fattore di vista impiegando delle ipotetiche corde tese fra i vertici che individuano le superfici. Con riferimento alla figura 14.9 è possibile dimostrare che

$$L_1 F_{12} = \frac{(L_3 + L_4) - (L_5 + L_6)}{2} = L_2 F_{21} \quad (14.54)$$

### Calcolo del fattore di vista fra due cilindri coassiali

Consideriamo il problema del calcolo del fattore di vista fra due cilindri coassiali molto lunghi. Tale problema può risolversi in modo molto rapido impiegando la relazione di reciprocità. Infatti, se indichiamo con  $S_1 = \pi d_1 L$  la superficie interna del cilindro esterno e  $S_2 = \pi d_2 L$  la superficie esterna del cilindro interno abbiamo

$$F_{12} S_1 = F_{21} S_2 = 1 \cdot S_2 \quad (14.55)$$

Da cui

$$F_{12} = \frac{d_2}{d_1} \quad (14.56)$$

Sempre utilizzando la relazione di reciprocità si può determinare l'espressione del fattore di vista fra due sfere concentriche o non concentriche, oppure fra due cilindri eccentrici molto lunghi.

## 14.5 Trasmissione di calore per irraggiamento fra superfici grigie ed uniformemente diffondenti

I problemi di irraggiamento termico normalmente sono molto difficili da risolvere principalmente a causa della difficile schematizzazione del comportamento radiativo delle superfici

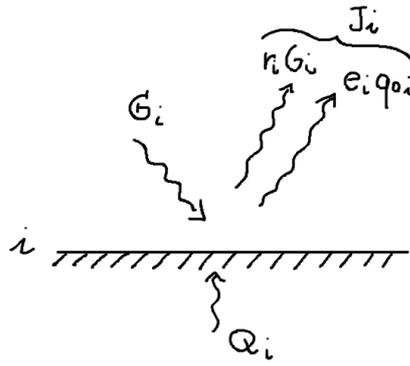


Figura 14.10: Radiosità  $J_i$  della superficie  $i$  e bilancio di potenza.

reali. Inoltre la distribuzione di temperatura sulle superfici che scambiano radiazione termica è spesso determinata da fenomeni di conduzione e convezione, dunque non è uniforme. Per semplificare lo studio dei problemi di irraggiamento termico è naturale pertanto introdurre delle ipotesi semplificative sulla natura delle superfici, e sulla distribuzione di temperatura superficiale. In questa sezione consideriamo lo scambio di radiazione termica fra superfici *grigie* ed *uniformemente diffondenti*.

### 14.5.1 Radiosità

Si definisce radiosità di una superficie la potenza specifica totale che abbandona la superficie. Nel caso di corpi opachi tale potenza è pari alla somma di quella emessa dalla superficie più il contributo di riflessione dell'irradiazione  $G_i$ . Se supponiamo valida la legge di Kirchhoff in forma integrale  $e_i(T) = a_i(T)$  possiamo ottenere la seguente espressione per la radiosità

$$\begin{aligned} J_i &= e_i q_{0i} + r_i G_i \\ &= e_i q_{0i} + (1 - e_i) G_i \quad [\text{W/m}^2] \end{aligned} \quad (14.57)$$

D'altra parte alla superficie abbiamo il bilancio di potenza

$$Q_i = S_i J_i - S_i G_i \quad [\text{W}] \quad (14.58)$$

Sostituendo l'irradiazione ottenuta da (14.57) otteniamo

$$\begin{aligned} Q_i &= S_i J_i - S_i \frac{J_i - e_i q_{0i}}{(1 - e_i)} \\ &= S_i e_i \frac{q_{0i} - J_i}{(1 - e_i)} \quad [\text{W/m}^2] \end{aligned} \quad (14.59)$$

Per analogia con la legge di Ohm è definiamo la *resistenza superficiale* di irraggiamento

$$\boxed{R_i = \frac{1 - e_i}{S_i e_i}} \quad (14.60)$$

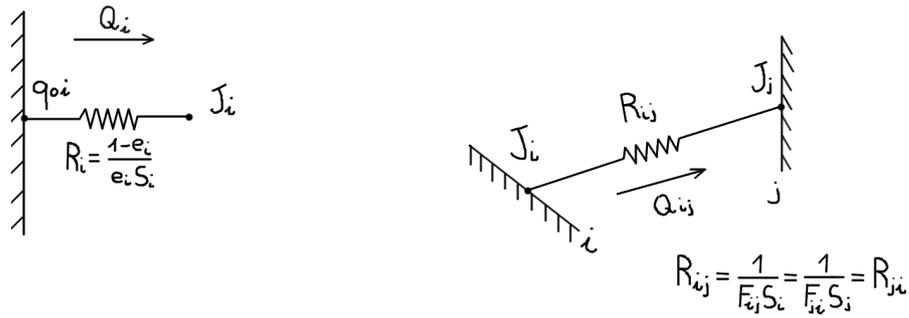


Figura 14.11: Schematizzazione della resistenza superficiale e della resistenza dovuta al fattore di vista nei problemi di irraggiamento termico.

e scriviamo (14.59) come

$$q_{0i} - J_i = R_i Q_i \quad (14.61)$$

Dalla (14.61) notiamo che una superficie grigia irradia meno di una superficie nera che si trova alla stessa temperatura. Tuttavia se la superficie è termicamente isolata<sup>8</sup> ( $Q_i \equiv 0$ ) allora la sua radiosità coincide con quella del corpo nero  $J_i = q_{0i}$ .

### 14.5.2 Potenza termica netta trasmessa fra due superfici

La potenza netta  $Q_{ij}$  trasmessa fra due superfici  $i$  e  $j$  per irraggiamento termico si calcola come differenza della potenza che lascia  $i$  per andare in  $j$  meno quella che lascia  $j$  per andare in  $i$ . Impiegando la definizione di radiosità, e la relazione di reciprocità dei fattori di vista otteniamo

$$Q_{ij} = S_i J_i F_{ij} - S_j J_j F_{ji} \quad (14.62)$$

$$= S_i F_{ij} (J_i - J_j) \quad (14.63)$$

Se definiamo resistenza di irraggiamento dovuta al fattore di vista fra le superfici  $i$  e  $j$  la quantità

$$R_{ij} = \frac{1}{S_i F_{ij}} = R_{ji} \quad (14.64)$$

possiamo scrivere

$$(J_i - J_j) = F_{ij} Q_{ij} \quad (14.65)$$

Se trattiamo le radiosità delle superfici come dei potenziali di una rete elettrica è possibile risolvere un problema di irraggiamento termico considerando appunto una schematizzazione con una rete elettrica.

## 14.6 Irraggiamento termico in presenza gas assorbenti

La radiazione elettromagnetica è in grado di interagire oltre che con i solidi anche con i gas e con i liquidi. In altre parole anche in mezzi trasparenti è possibile avere emissione

<sup>8</sup>In questo caso si dice che la superficie è *reirradiante*.

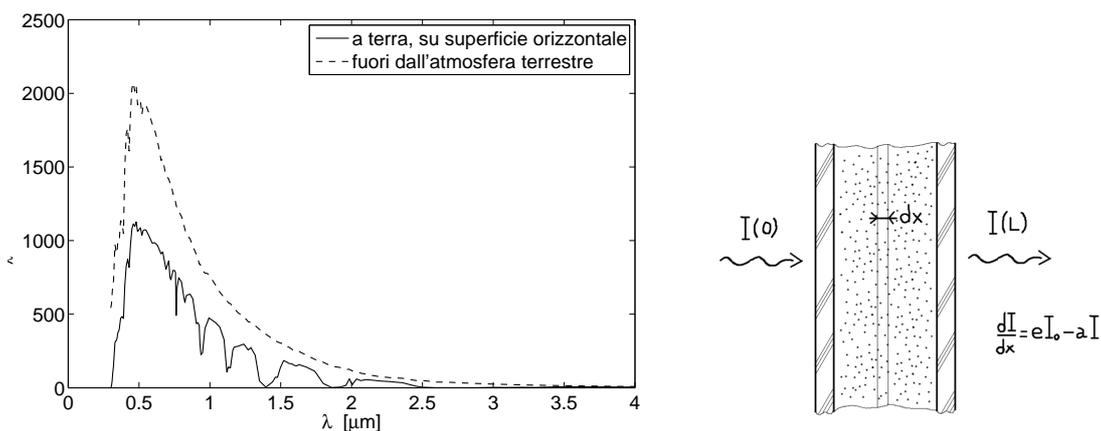


Figura 14.12: Spettro di radiazione solare a terra su superficie orizzontale e fuori dall'atmosfera (Bologna, 11 marzo 2008 ore 13:00) ed intensità di radiazione in un mezzo assorbente.

ed assorbimento di radiazione termica. È il caso ad esempio di alcuni gas presenti in atmosfera ( $CO_2$ ,  $H_2O$ ,  $S_2O$ ) che sono in grado di assorbire ed emettere radiazione termica in bande ben precise. Il meccanismo di emissione e di assorbimento inoltre è il responsabile del colore azzurro del cielo e di alcune buche che osserviamo nello spettro di potenza solare analizzato a terra. Tenere conto dei fenomeni di assorbimento e di emissione dei mezzi interposti fra due superfici irradianti complica di molto il calcolo.

### 14.6.1 Equazione per l'intensità di radiazione in un mezzo assorbente

Consideriamo un fenomeno radiativo avente intensità di radiazione  $I(\lambda, T)$  e supponiamo che tale radiazione passi attraverso un mezzo trasparente in grado di assorbirla ed emetterla. Sia  $a(\lambda, T)$  il coefficiente spettrale di assorbimento del mezzo. La variazione dell'intensità di radiazione nell'attraversamento di uno strato piano trasparente è data dall'equazione

$$\frac{dI}{dx} = e(\lambda, T) I_0 - a(\lambda, T) I \tag{14.66}$$

in cui  $I_0$  è l'intensità di radiazione del corpo nero. Se riteniamo valida la legge di Kirchhoff abbiamo  $e(\lambda, T) = a(\lambda, T)$ , pertanto

$$\frac{dI}{dx} = aI_0 - aI \tag{14.67}$$

Se indichiamo con  $I(0) = I^*$  l'intensità di radiazione proveniente da fuori che entra nello strato (condizione al contorno), allora la soluzione di questa equazione differenziale è

$$I(x) = \underbrace{I^* e^{-ax}}_{\text{assorbimento}} + \underbrace{(1 - e^{-ax}) I_0}_{\text{emissione}} \tag{14.68}$$

Se non vi è radiazione esterna incidente ( $I^* = 0$ ), ma è il gas ad emettere ed assorbire la sua stessa radiazione allora

$$I(x) = (1 - e^{-ax}) I_0 \tag{14.69}$$

Definiamo l'assorbimento *spettrale* per uno strato di spessore  $L$

$$\alpha(\lambda, T) = 1 - e^{-a(\lambda, T)L} \quad (14.70)$$

Il grafico di  $\alpha(\lambda, T)$  per i gas è una funzione molto irregolare definita in bande di frequenza ben precise. Per la legge di Kirchhoff l'assorbimento spettrale è pari all'emissività spettrale

$$\epsilon(\lambda, T) = 1 - e^{-a(\lambda, T)L} \quad (14.71)$$

### 14.6.2 Radiazione termica di un gas ad alta temperatura incidente su una superficie piana

Consideriamo una porzione di gas emisferica ed un elemento di area piana  $dS$  centrato nell'origine della sfera. Se integriamo l'intensità di radiazione sulla semisfera di raggio  $L$  otteniamo il potere emissivo monocromatico del gas

$$\varepsilon(\lambda, T) = \pi (1 - e^{-aL}) I_0(\lambda, T) = \epsilon(\lambda, T) \varepsilon_0(\lambda, T) \quad (14.72)$$

in cui  $\varepsilon_0 = \pi I_0$  è il potere emissivo monocromatico del corpo nero.

# Appendice A

## Richiami di analisi tensoriale

### A.1 Componenti fisiche di tensori

Le coordinate cartesiane ortogonali hanno tutte le dimensioni di una lunghezza ma in generale non possiamo aspettarci lo stesso in coordinate generali. Ad esempio le coordinate cilindriche  $\eta^1 = r$ ,  $\eta^2 = \phi$ ,  $\eta^3 = z$  hanno  $\eta^1$  ed  $\eta^3$  con le dimensioni di una lunghezza mentre  $\eta^2$  è adimensionale. Pertanto se esprimiamo la velocità di una particella in coordinate  $\boldsymbol{\eta}$ ,  $u^i = d\eta^i/dt$  avremo delle componenti che hanno dimensione diversa<sup>1</sup>! Pertanto occorre estendere il concetto di componente di un vettore a coordinate curvilinee in modo opportuno. A tal fine consideriamo i vettori controvarianti base  $e^i_{(j)} = \delta^i_j / \sqrt{g_{jj}}$ , tangenti alle linee coordinate  $\eta^j = cost$ , e poniamo

$$A^i = \sum_{j=1}^3 A(j) e^i_{(j)} \quad (\text{A.1})$$

Da tale relazione deduciamo che

$$A(i) = \sqrt{g_{ii}} A^i \quad (\text{A.2})$$

Per ottenere le componenti fisiche di un vettore covariante  $A_i$  occorre prima alzare l'indice covariante  $i$  con  $g^{ij}$  e poi moltiplicare per  $\sqrt{g_{jj}}$  (senza sommare su  $j$ ).

$$A(j) = \sqrt{g_{jj}} g^{ij} A_i \quad (\text{A.3})$$

Ad esempio, calcoliamoci le componenti del gradiente di uno scalare in coordinate cilindriche. La metrica covariante è  $g_{rr} = 1$ ,  $g_{\phi\phi} = r^2$ ,  $g_{zz} = 1$ . Le componenti controvarianti sono  $g^{rr} = 1$ ,  $g^{\phi\phi} = 1/r^2$ ,  $g^{zz} = 1$ . Pertanto

$$[\nabla T]_r = \sqrt{g_{rr}} g^{rr} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} \quad (\text{A.4})$$

$$[\nabla T]_\phi = \sqrt{g_{\phi\phi}} g^{\phi\phi} \frac{\partial T}{\partial \phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \quad (\text{A.5})$$

$$[\nabla T]_z = \sqrt{g_{zz}} g^{zz} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{A.6})$$

Consideriamo ora un tensore di ordine superiore  $T^i_j$ . Se tale tensore è prodotto diretto di due vettori le componenti fisiche si ottengono come prodotto delle componenti fisiche dei

---

<sup>1</sup>Nel caso delle coordinate cilindriche  $[u^1] = \text{m/s}$ ,  $[u^2] = \text{Hz}$ .

singoli vettori. Infatti in coordinate cartesiane ortogonali se  $t^i = T_j^i n^j$  allora le componenti fisiche verificano  $t(i) = T^{(ij)}n(j)$ . Questo significa che

$$t(i) = h_i t^i = h_i T_j^i n^j = \underbrace{\frac{h_i}{h_j} T_j^i}_{T^{(ij)}} n(j) = T^{(ij)}n(j) \quad (\text{A.7})$$

Estendiamo lo stesso ragionamento a coordinate curvilinee ottenendo

$$T^{(ij)} = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{jj}}} T_j^i \quad (\text{A.8})$$

## A.2 Divergenza covariante di un vettore e di un tensore doppio

Consideriamo l'espressione della connessione affine del sistema di coordinate scritta in termini della metrica

$$\Gamma_{mj}^i = \frac{1}{2} g^{ip} \left( \frac{\partial g_{mp}}{\partial \eta^j} + \frac{\partial g_{jp}}{\partial \eta^m} - \frac{\partial g_{mj}}{\partial \eta^p} \right) \quad (\text{A.9})$$

Se eguagliamo un indice superiore ad uno qualunque degli inferiori otteniamo<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^i &= \frac{1}{2} g^{ip} \left( \frac{\partial g_{ip}}{\partial \eta^j} + \frac{\partial g_{jp}}{\partial \eta^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \eta^p} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{ip} \frac{\partial g_{ip}}{\partial \eta^j} \\ &= \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial \eta^j} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \eta^j} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

in cui  $g$  è il determinante della metrica covariante. Per un tensore doppio controvariante abbiamo

$$\begin{aligned} T_{;j}^{ij} &= \frac{\partial T^{ij}}{\partial \eta^j} + \Gamma_{jp}^i T^{jp} + \Gamma_{jp}^j T^{ip} \\ &= \frac{\partial T^{ij}}{\partial \eta^j} + \Gamma_{jp}^i T^{jp} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \eta^j} T^{ij} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta^j} (\sqrt{g} T^{ij}) + \Gamma_{jp}^i T^{jp} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Notiamo che se il tensore è antisimmetrico, cioè  $T^{ij} = -T^{ji}$  l'ultimo termine se ne va. Analogamente è facile dimostrare che la divergenza di un vettore covariante in coordinate

---

<sup>2</sup>Ricordiamo che

$$\frac{\partial g}{\partial \eta^j} = g g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial \eta^j} \quad (\text{A.10})$$

generali è

$$\begin{aligned}
A^k_{;k} &= \frac{\partial A^k}{\partial \eta^k} + \Gamma^k_{kp} A^p \\
&= \frac{\partial A^k}{\partial \eta^k} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \eta^k} A^k \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta^k} (\sqrt{g} A^k)
\end{aligned} \tag{A.13}$$

### A.3 Derivate intrinseche e convettive

Per comodità riportiamo alcuni risultati fondamentali relativi alla derivazione intrinseca e convettiva di scalari vettori e tensori in sistemi di coordinate curvilinei e dipendenti dal tempo

$$\frac{\delta \mathfrak{F}}{\delta t} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + \mathfrak{F}_{;k} (u^k - U^k), \tag{A.14}$$

$$\frac{\delta A^i}{\delta t} = \frac{\partial A^i}{\partial t} + A^i_{;k} (u^k - U^k) + A^k U^i_{;k}, \tag{A.15}$$

$$\frac{\delta A_i}{\delta t} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + A_{i;k} (u^k - U^k) - A_k U^k_{;i}, \tag{A.16}$$

$$\frac{\delta A_{ik}}{\delta t} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial t} + A_{ik;m} (u^m - U^m) - A_{im} U^m_{;k} - A_{mk} U^m_{;i}, \tag{A.17}$$

$$\frac{\delta A^{ik}}{\delta t} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial t} + A^{ik}_{;m} (u^m - U^m) + A^{im} U^k_{;m} + A^{mk} U^i_{;m}. \tag{A.18}$$

$$\frac{d_c \mathfrak{S}}{dt} = \frac{\delta \mathfrak{S}}{\delta t}, \tag{A.19}$$

$$\frac{d_c B^i}{dt} = \frac{\delta B^i}{\delta t} - B^m u^i_{;m}, \tag{A.20}$$

$$\frac{d_c B_i}{dt} = \frac{\delta B_i}{\delta t} + B_m u^m_{;i}, \tag{A.21}$$

$$\frac{d_c A^{ij}}{dt} = \frac{\delta A^{ij}}{\delta t} - A^{im} u^j_{;m} - A^{mj} u^i_{;m}, \tag{A.22}$$

$$\frac{d_c A_{ij}}{dt} = \frac{\delta A_{ij}}{\delta t} + A_{im} u^m_{;j} + A_{mj} u^m_{;i}. \tag{A.23}$$

Per il tensore metrico, in particolare

$$\frac{\delta g_{ij}}{\delta t} = 0 \tag{A.24}$$

$$\frac{d_c g_{ij}}{dt} = g_{im} u^m_{;j} + g_{mj} u^m_{;i} = 2e_{ij} \tag{A.25}$$

in cui  $e_{ij}$  è il tensore delle velocità di deformazione.

Derivata materiale del determinante della metrica del sistema di coordinate lagrangiano. Consideriamo un sistema di coordinate curvilineo trasportato dal fluido. Sia  $\gamma_{ij}$  la metrica

associata a questo sistema di coordinate. Se indichiamo con  $\Gamma^{ij}$  il cofattore dell'elemento di  $ij$  della metrica, possiamo scrivere il determinante di  $\gamma_{ij}$  come segue

$$\gamma := \det(\gamma_{ij}) = \sum_j \gamma_{ij} \Gamma^{ij} \quad \forall i, \text{ (non sommare su } i\text{)}. \quad (26)$$

Se sommiamo anche sull'indice  $i$  troviamo

$$3\gamma = \gamma_{ij} \Gamma^{ij} \quad (\text{caso tridimensionale}), \quad (27)$$

$$2\gamma = \gamma_{ij} \Gamma^{ij} \quad (\text{caso bidimensionale}). \quad (28)$$

Per il caso tridimensionale il cofattore dell'elemento di matrice  $\gamma_{ij}$  ha espansione tensoriale

$$\Gamma^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{imn} \epsilon^{jpq} \gamma_{mp} \gamma_{nq}, \quad (29)$$

in cui  $\epsilon^{imn}$  è il simbolo di permutazione, cioè la densità tensoriale di Levi Civita. Sostituendo (29) nella (27) troviamo

$$\gamma = \frac{1}{6} \epsilon^{imn} \epsilon^{jpq} \gamma_{ij} \gamma_{mp} \gamma_{nq}. \quad (30)$$

Consideriamo ora la derivata materiale di (30)

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{6} \epsilon^{imn} \epsilon^{jpq} \left( \frac{d\gamma_{ij}}{dt} \gamma_{mp} \gamma_{nq} + \gamma_{ij} \frac{d\gamma_{mp}}{dt} \gamma_{nq} + \gamma_{ij} \gamma_{mp} \frac{d\gamma_{nq}}{dt} \right). \quad (31)$$

Se scambiamo gli indici nel secondo ( $m \leftrightarrow i, p \leftrightarrow j$ ) e nel terzo termine ( $n \leftrightarrow i, q \leftrightarrow j$ ) otteniamo<sup>3</sup>

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{6} \epsilon^{imn} \epsilon^{jpq} 3 \frac{d\gamma_{ij}}{dt} \gamma_{mp} \gamma_{nq} = \frac{1}{2} \underbrace{\epsilon^{imn} \epsilon^{jpq} \gamma_{mp} \gamma_{nq}}_{\Gamma^{ij}} \frac{d\gamma_{ij}}{dt}. \quad (32)$$

Nel senso delle matrici, la metrica controvariante  $\gamma^{ij}$  è la matrice inversa di  $\gamma_{ij}$ , cioè  $\gamma_{ik} \gamma^{kj} = \delta_i^j$ . Dalla teoria dell'inversione delle matrici quadrate segue che

$$\gamma^{ij} = \frac{\Gamma^{ij}}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \Gamma^{ij} = \gamma \gamma^{ij}. \quad (33)$$

Sostituendo questa espressione in (32) troviamo la formula

$$\boxed{\frac{d\gamma}{dt} = \gamma \gamma^{ij} \frac{d\gamma_{ij}}{dt}}. \quad (34)$$

Sottolineiamo che la quantità  $\gamma^{ij} d\gamma_{ij}/dt$  è uno scalare dato che la derivata materiale di ogni tensore in coordinate trasportate del fluido è ancora un tensore, e si dice *derivata convettiva*.

<sup>3</sup>I suddetti scambi di generano inversioni di segno in  $\epsilon^{imn}$  e  $\epsilon^{jpq}$  che si neutralizzano fra loro nel senso che  $\epsilon^{imn} \epsilon^{jpq} = (-\epsilon^{min}) (-\epsilon^{pqj}) = \epsilon^{min} \epsilon^{pqj}$ .